

103 學年度指定科目考試數學甲考科非選擇題考生作答情形分析

第一處 朱惠文

每年指考成績單寄發後，總是有些考生認為自己的數學甲非選擇題，答案明明正確，為什麼無法得到該題的滿分，甚至 1 分未得？本文就此一疑問，說明本年度數學甲非選擇題僅得到部分題分或是 1 分未得的可能情形，以及數學科非選擇題給分的大原則，希望能藉此廓清部分考生的疑惑。以下各題會從兩方面進行分析，一是正確的解題步驟，二是考生解題的錯誤概念或解法，至於各題的參考解答可詳見 7 月 17 日中心網站公布的參考答案。

第一題：

一、在坐標平面上以 Ω 表曲線 $y=x-x^2$ 與直線 $y=0$ 所圍的有界區域。

(1) 試求 Ω 的面積。(3 分)

(2) 若直線 $y=cx$ 將 Ω 分成面積相等的兩塊區域，試求 c 之值。(7 分)

分析：本題評量多項式函數微積分的概念與應用，試題分為 2 小題，並由易而難排列，引導解題。

第(1)小題

(一)正確解題步驟：

$y=x-x^2$ 的圖形交直線 $y=0$ 的 x 坐標為 $x=0,1$ ；故 Ω 之面積為

$$\int_0^1 (x-x^2)dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}。$$

(二)錯誤概念或解法：

(A1) 交點坐標錯誤：例如算出交點坐標為 $x=0,-1$ 。

(A2) 積分式錯誤：例如列出 $\int_{-1}^0 (x-x^2)dx$ 。

(A3) 反導式錯誤：例如列出 $\int_0^1 (x-x^2)dx = 1-2x \Big|_0^1$ 。

(A4) 計算錯誤：例如寫出 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

第(2)小題

(一)正確解題步驟：

解題分三個步驟：先依題意算出直線 $y=cx$ 交 $y=x-x^2$ 圖形的 x 坐標為 $x=0, 1-c$ ，並依據題設列出區域面積的積分式；接下來化簡得滿足 c 的方程式；最後再算出 c 的值。

(二)錯誤概念或解法：

(B1) 交點坐標錯誤：例如算出交點的 x 坐標為 $x=0, c-1$ 。

(B2) 區域面積表示錯誤：例如將區域 I 的面積表示為 $\int_0^{1-c} [cx - (x-x^2)]dx$ 或

$$\int_0^{1-c} [(x-x^2) - cx] \pi dx。$$

(B3) 化簡過程錯誤：例如化簡得 $2c^3 - 6c^2 + 6c - 2 = 0$ 。

(B4) 計算錯誤或不會解 c ：例如列出 $2c^3 - 6c^2 + 6c - 1 = 0$ 或是化簡得

$$(1-c)^3 = \frac{1}{2}，\text{但不會求 } c \text{ 的值。}$$

第二題：

對於正整數 n ，設 $(1+i)^n = a_n + ib_n$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ 且 a_n 、 b_n 為實數。

(1) 試求 $a_4^2 + b_4^2$ 之值。(2分)

(2) 從恆等式 $(1+i)^{n+1} = (1+i)^n(1+i)$ 可推得 a_n 、 b_n 會滿足矩陣乘法

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}，\text{試求矩陣 } T。(4分)$$

(3) 令 P 、 Q 為坐標平面上異於原點 O 的兩點，若矩陣 T 在平面上定

義的線性變換將 P 、 Q 分別映射到點 P' 、 Q' ，試證 $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$ 且

$$\angle POQ = \angle P'OQ'。(8分)$$

分析：本題評量複數運算、矩陣單元中的平面上的線性變換與二階方陣，
試題分 3 小題，各小題評量的概念由易而難。

第(1)小題

(一)正確解題步驟：

$$a_4^2 + b_4^2 = (|1+i|^4)^2 = (\sqrt{2})^8 = 16, \text{ 得 } a_4^2 + b_4^2 = (-4)^2 = 16。$$

(二)錯誤概念或解法：

(C1) 複數觀念錯誤：例如算得 $a_4 + ib_4 = 4 + 0i$ 。

(C2) 沒有寫出正確答案：例如算出 $(1+i)^2 = 2i$ ， $(1+i)^4 = -4$ ，但沒有算出

$$a_4^2 + b_4^2 = (-4)^2 = 16。$$

第(2)小題

(一)正確解題步驟：

解題分二個步驟：先依據題意得出 a_n 、 b_n 與 a_{n+1} 、 b_{n+1} 的關係式，再求出正確的矩陣 T 。

(二)錯誤概念或解法：

(D1) 複數乘法錯誤： $(1+i)^2 = 2 + 2i$ 。

(D2) 不會列出關係式：例如寫出 $a_{n+1} + ib_{n+1} = (a_n + ib_n)(1+i)$ ，但列出

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = -a_n + b_n \end{cases}。$$

(D3) 矩陣觀念錯誤：例如寫出 $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$ ，但誤以為 $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ；或列出

正確的方程組，但記錯反矩陣公式，算得 $T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ ；或記錯旋轉公

式，例如 $T = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}$ 。

第(3)小題

(一)正確解題步驟：

此題有兩個解法，一是看出 $T = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}$ ，所以 T 的作用是將向量旋轉 45° ，並放大 $\sqrt{2}$ 倍，得證 $\angle POQ = \angle P'OQ'$ 。第二個解法是根據題意與第(2)小題，求得 $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \sqrt{2} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$ 。再利用內積或餘弦定理證明。

(二)錯誤概念或解法：

(E1) 沒有理由或理由不夠充分：例如沒有算出 $T = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}$ ，就

直接寫 T 的作用是將向量旋轉並放大；利用餘弦定理，但只證明

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \sqrt{2} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}, \text{ 未證明 } \overline{P'Q'}^2 = 2\overline{PQ}^2; \text{ 或利用內積}$$

$$\cos \angle P'OQ' = \frac{\overline{OP'} \cdot \overline{OQ'}}{|\overline{OP'}| |\overline{OQ'}|} = \frac{(a-b)(c-d) + (a+b)(c+d)}{\sqrt{2a^2 + 2b^2} \sqrt{2c^2 + 2d^2}}, \text{ 但未化簡成}$$

$$\frac{\overline{OP'} \cdot \overline{OQ'}}{|\overline{OP'}| |\overline{OQ'}|} = \frac{2(ac+bd)}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2}\sqrt{c^2+d^2}} \text{ 的形式，直接得證 } \angle POQ = \angle P'OQ'.$$

(E2) 利用錯誤的矩陣證明：例如算出錯誤的 $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，並依此證明第

(3)小題。

(E3) 記錯公式，或計算錯誤：例如 $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)}$ 。

數學甲與數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。本文說明正確的解題概念與步驟，以及得部分分數與無法得分的可能情形¹，主要用意在於提供老師教學或學生平常練習時的參考。

¹吳家怡(民93)，我的數學甲非選擇題得分了嗎。選才通訊，第120期。