

## 104 學年度指定科目考試數學乙考科非選擇題考生作答情形分析

第一處 陳慧美

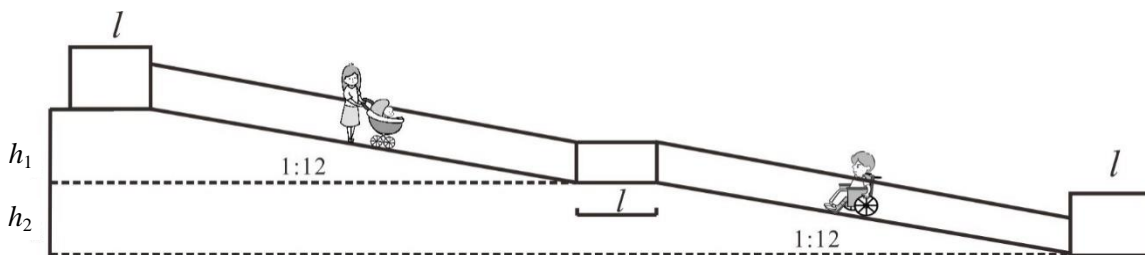
每年指考成績單寄發後，有些考生認為自己的數學乙考科非選擇題，答案明明正確，為什麼無法得到該題的滿分，甚至 1 分未得？本文就此一疑問，說明本年度數學乙非選擇題僅得到部分題分或是 1 分未得的可能情形，以及數學科非選擇題給分的大原則，希望能藉此釐清部分考生的疑惑。以下各題從兩方面進行分析，一是正確的解題步驟，二是考生解題的一些錯誤概念或解法，至於各題的參考解答可詳見 7 月 17 日中心網站公布的參考答案。

### 第一題：

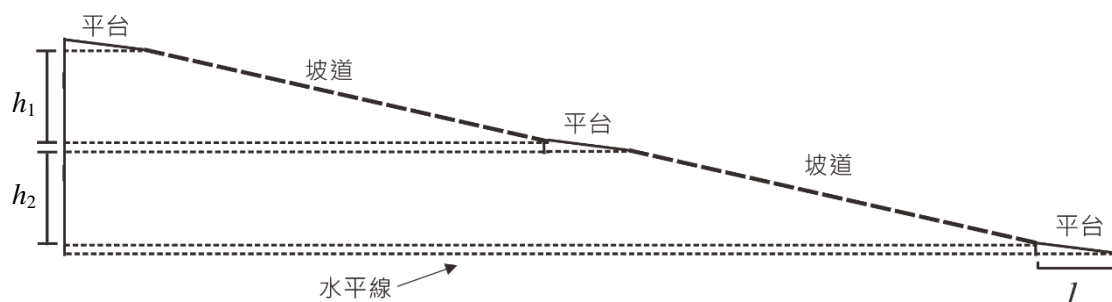
**題目：**根據內政部營建署《建築物無障礙設施設計規範》，無障礙通路之設計需符合以下規定。

- 坡道之坡度（高度與水平長度之比值）不得大於  $\frac{1}{12}$ 。
- 坡道之起點及終點，應設置長、寬各 150 公分以上之平台。此處的長，指的是水平長度，而非斜面的長度。
- 坡道的中間應設置適當數量的平台，使得每段坡道的高差不超過 75 公分，且平台的水平長度至少 150 公分。
- 各平台之坡度不得大於  $\frac{1}{50}$ 。

圖一與圖二為側面示意圖，圖一摘自此規範書，圖二為圖一的簡明版，其中  $l \geq 150$ ， $h_1, h_2 \leq 75$ ；坡道之坡度相當於坡道斜率之絕對值。



圖一



圖二

依上述規定，一條升高 2 公尺的無障礙坡道，在無轉彎的條件下，其最小可能的水平長度（含平台）為多少公尺？（12 分）

**分析：**本題評量在不同坡度、平台水平長度、高差的限制下，一條升高 2 公尺的無障礙坡道，可如何規劃以達到最小可能的水平長度(含平台)。

**(一) 正確解題步驟：**

1. 高度差為 200 公分，要有最短水平距離，則所有平台的坡度須恰好為  $\frac{1}{50}$ ，且所有坡道的坡度須恰好為  $\frac{1}{12}$ 。因為平台的坡度  $\frac{1}{50}$  小於坡道的坡度  $\frac{1}{12}$ ，要得到最短水平長度就必須極小化平台的水平長度，也就是極小化平台的高度差。
2. 每一個平台水平距離至少為 150 公分，也就是每一個平台的高度差至少為  $150 \times \frac{1}{50} = 3$  公分。可以觀察：
  - (1) 當高度不超過 6 公分時，只能設置一個平台。
  - (2) 當高度差超過 6 公分，但不超過  $3 + 75 + 3$  公分時，可以設置前後兩個各 150 公分的平台，中間一個坡道。
  - (3) 當高度差超過  $3 + 75 + 3$  公分，但不超過  $3 + 75 + 3 + 75 + 3$  公分時，可以設置前後兩個各 150 公分的平台，中間兩個坡道以及一個 150 公分的平台。
  - (4) 當高度差超過  $3 + 75 + 3 + 75 + 3$  公分，但不超過  $3 + 75 + 3 + 75 + 3 + 75 + 3$  公分時，可以設置前後兩個各 150 公分的平台，中間三個坡道以及兩個 150 公分的平台。

因此，高度差 200 公分須設置四個各 150 公分的平台以及三個坡道。

3. 四個 150 公分的平台會升高  $3 \times 4 = 12$  公分，剩下的  $200 - 12 = 188$  公分的高度由坡道來提供，所以坡道的水平長度為  $188 \times 12 = 2256$  公分。因此水平總長度為  $2256 + 150 \times 4 = 2856$  公分，也就是 28.56 公尺。

## (二) 錯誤概念或解法：

此小題僅得部分分數的幾種情形如下：

- (A1)僅算出每一平台高度為 3 公分，但無法指出需設置 4 個平台。
- (A2)僅能指出需設置 4 個平台，但無法算出每一平台高度為 3 公分。
- (A3)指出需設置 4 個平台，但認為平台無坡度，故算出坡道水平總長度為 30m。
- (A4)僅算出設置其他數量平台時的正確坡道水平總長度，如：設置 2 個平台，或設置 3 個平台時，正確的坡道水平總長度。
- (A5)僅知道需設置 4 個平台與算出每一平台高度為 3。
- (A6)指出需設置 4 個平台，且每一平台高度為 3，但求解時發生錯誤，如：  
將最後一段坡道水平長算成 451；或算坡道水平總長度時列式成：  
 $900 \times 2 + 3 \times 4 + 456 = 2268$ 。

本題屬高二直線與圓單元之試題，主要評量考生斜率概念。藉由題意理解：(1)坡道之起點及終點，應設置平台；(2)高度差為 200 公分，要有最短水平距離，則所有平台的坡度須恰好為  $\frac{1}{50}$ ，且所有坡道的坡度須恰好為  $\frac{1}{12}$ ；(3)要得到最短水平長度就必須讓平台的水平長度最小，即平台的高度差也最小。

在平台的設置方面，部分考生因未注意坡道之起點及終點需設置平台，因此無法得到正確的坡道水平總長度。當然，亦無法正確指出有 4 個平台。

在平台的坡度方面，因部分考生認為平台沒有坡度，故無法得到平台高度之分數，所算出坡道水平總長度為 30m。

在坡道水平總長度方面，部分考生僅算出其他數量平台之正確坡道水平總長度。或雖指出需設置 4 個平台，但因列式列錯，以致無法得滿分。

數學科非選擇題主要評量用數學式清楚表達解題過程的能力，因此推理過程與說明是否正確、邏輯判斷是否合理，均為評定分數的重要依據。若考生只寫答案，而未有任何的理由、算式將無法得分。

## 第二題：

**題目：**某航空公司因機械故障而停飛，致使平安旅行社原來預定搭此航空公司班機返台的 25 位旅客，被迫滯留在當地。領隊經詢問後得知，另外三家航空公司飛往台灣近期的機位已滿，都必須等待，當時有三種方案可以將旅客送回台灣如下表（表中的數據是以每人為單位）。例如 A 方案，旅行社必須負擔每人 4500 元的食宿費加上 400 元的轉機價差。

方案	食宿費	轉機價差	返台所需等待時間
A 轉搭甲航空公司的班機	4500 元	400 元	3 天
B 轉搭乙航空公司的班機	5500 元	200 元	4 天
C 轉搭丙航空公司的班機	8000 元	0 元	6 天

註：轉機價差是指「轉搭其他航空公司的班機」所需補的票價差額。

領隊向旅行社報告後，旅行社同意領隊可以使用下列經費來解決此事件：食宿費總共最多 150000 元，轉搭其他航空公司班機的轉機價差總共最多 8000 元。試問在經費允許的條件下，要如何分配採用 A、B、C 這三種方案的人數，才能使全部旅客返回台灣所用的等待總人天數最少？所謂等待總人天數是採用各方案的人數乘以等待的天數之總和，例如：若採用 A、B、C 方案的人數分別為 8、10、7 人，則等待總人天數為  $8 \times 3 + 10 \times 4 + 7 \times 6 = 106$ （人天）。如果領隊規劃  $x$  人轉搭甲航空公司的班機、 $y$  人轉搭乙航空公司的班機，其餘的旅客轉搭丙航空公司的班機，由下列步驟，求出全部旅客返回台灣所用的最少等待總人天數。

(1) 寫出此問題的線性規劃不等式及目標函數。(4分)

(2) 求可行解區域的所有頂點的坐標。(4分)

(3) 求全部旅客返回台灣所用的最少等待總人天數。(4分)

分析：本題評量線性規劃概念，考生可利用頂點法或平行線法求解。

### 第(1)小題

(一) 正確解題步驟：

$$\text{不等式：} \begin{cases} 4500x + 5500y + 8000(25 - x - y) \leq 150000 \\ 400x + 200y \leq 8000 \\ x + y \leq 25 \\ x, y \geq 0 \end{cases}, \text{或} \begin{cases} 7x + 5y \geq 100 \\ 2x + y \leq 40 \\ x + y \leq 25 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{目標函數：} f(x, y) = 3x + 4y + 6(25 - x - y) = 150 - 3x - 2y$$

亦可寫成

$$\text{不等式：} \begin{cases} 4500x + 5500y + 8000z \leq 150000 \\ 400x + 200y \leq 8000 \\ x + y + z = 25 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}, \text{或} \begin{cases} 9x + 11y + 16z \leq 300 \\ 2x + y \leq 40 \\ x + y + z = 25 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{目標函數：} f(x, y, z) = 3x + 4y + 6z$$

(二) 錯誤概念或解法：

$$(B1) \text{寫錯不等式，如：} \begin{cases} 7x + 5y > 100 \\ 2x + y < 40 \\ x + y < 25 \\ x, y \geq 0 \end{cases}, \text{或} \begin{cases} 7x + 5y \leq 100 \\ 2x + y \leq 40 \\ x + y \leq 25 \\ x, y \geq 0 \end{cases}, \text{或} \begin{cases} 7x + 5y \geq 100 \\ 2x + y \leq 40 \\ x + y \leq 25 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

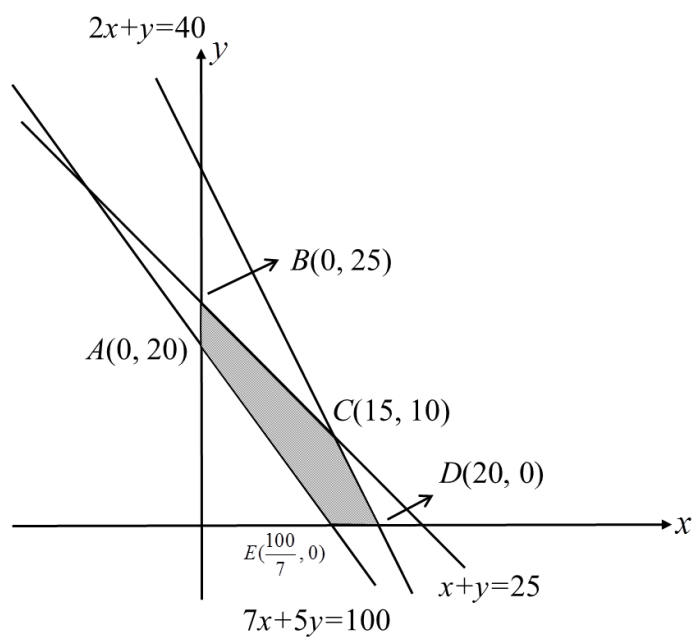
(B2)未寫出目標函數  $f(x, y) = 150 - 3x - 2y$ ，或寫錯目標函數。

### 第(2)小題

(一) 正確解題步驟：

由聯立不等式可繪出此可行解區域如下圖的灰色區域(含邊界)。寫出正確頂

點坐標  $A(0, 20)$ ,  $B(0, 25)$ ,  $C(15, 10)$ ,  $D(20, 0)$ ,  $E(\frac{100}{7}, 0)$



## (二) 錯誤概念或解法：

(C1)標示錯誤可行解區域，以致可行解區域上的頂點寫錯，如：標示成頂

點  $(\frac{100}{7}, 0)$ 、 $(0, 20)$ 、 $(0, 40)$ 、 $(20, 0)$ 所圍的四邊形區域。

### 第(3)小題

#### (一) 正確解題步驟：

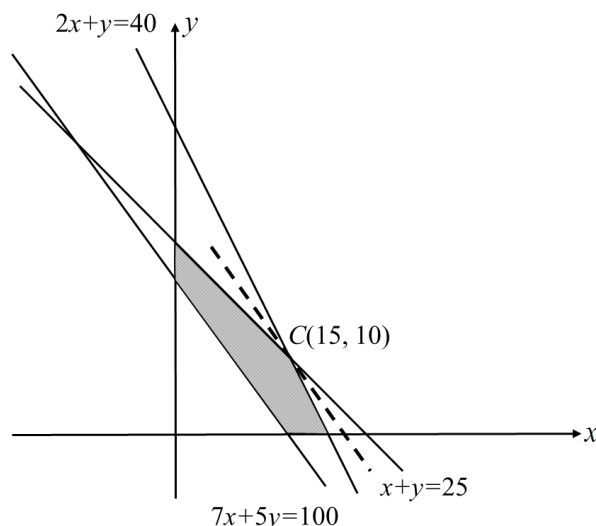
##### 解 1：頂點法

1. 將  $A, B, C, D, E$  頂點代入目標函數中

頂 點	$A(0, 20)$	$B(0, 25)$	$C(15, 10)$	$D(20, 0)$	$E(\frac{100}{7}, 0)$
$f(x, y) = 150 - 3x - 2y$	110	100	85	90	$\frac{750}{7}$

2. 當  $x = 15, y = 10$ 時， $f(15, 10) = 85$ 為最少等待總人天數

##### 解 2：平行線法



1. 畫出一條過  $C(15, 10)$  且與直線  $150 - 3x - 2y = k$  平行的直線，如圖。或比較直線  $150 - 3x - 2y = k$  的斜率  $m = -\frac{3}{2}$  介於  $-1$  與  $-2$  之間，即寫出  $-2 < -\frac{3}{2} < -1$
2. 當  $x = 15, y = 10$  時， $f(15, 10) = 85$  為最少等待總人天數。

## (二) 錯誤概念或解法：

(D1) 直接認定最少等待總人天數發生的頂點為  $(15, 10)$ ，且未將可行解區域上的所有頂點代入目標函數內比較，亦沒有任何理由說明。

(D2) 利用頂點法求解，將頂點代入目標函數計算函數值作比較時，因計算錯誤，而無法求得正確答案。

(D3) 利用平行線法求解，但未說明目標函數所定直線之斜率  $-\frac{3}{2}$  介於  $-1$  與  $-2$  之間。

(D4) 利用平行線法求解，在利用直線  $150 - 3x - 2y = k$  掃動時，因直線畫錯(即斜率錯誤)而找到錯誤頂點。

此題為線性規劃試題，在求出聯立不等式中，部分考生寫錯不等式組

$$\begin{cases} 7x + 5y \geq 100 \\ 2x + y \leq 40 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \quad \text{、或將不等式組的符號寫錯，如：寫成} \quad \begin{cases} 7x + 5y > 100 \\ 2x + y < 40 \\ x + y < 25 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \quad \text{，後續}$$

雖求出正確的頂點與目標函數，且將可行解區域上的頂點代入比較，求得

最小值，但仍無法得滿分。因考生一開始將情境問題轉換成數學式時，出現了錯誤的不等式組。

在寫出目標函數時，有部分考生未寫出或寫錯了目標函數，因此無法說明全部旅客返回台灣所用的最少等待總人天數。

在求最少等待總人天數時，多數考生是利用頂點法求解，其中常見的錯誤類型為：使用頂點法求解時，直接將頂點  $(15, 1)$  代入目標函數中，即認定此時可達最少等待總人天數為 85，並未將可行解區域上的其他頂點代入目標函數中比較，以致答案卷上無法呈現最少等待總人天數所發生的點是如何求得，故無法得到滿分。另有少數考生在求可行解區域頂點時，因粗心算錯頂點坐標，而無法得到正確答案，或將正確頂點代入目標函數中作比較時，部分頂點計算錯誤而失去部分分數，殊為可惜。

當考生能正確寫出不等式組、或將可行解區域正確標示出後，在第(3)小題中可利用「平行線法」求解。利用目標函數  $f(x, y) = 150 - 3x - 2y$  所定直線之斜率為  $-\frac{3}{2}$ ，當直線  $150 - 3x - 2y = k$  在坐標平面上平移時，可知當 15 人轉搭甲航空公司的班機、10 人轉搭乙航空公司的班機，可達最少等待總人天數為 85。考生若利用平行線法求解，較常發生的錯誤為未標示出可行解區域、或直線  $150 - 3x - 2y = k$  畫錯而得到錯誤的頂點、或未說明目標函數所定直線之斜率  $-\frac{3}{2}$  介於 -1 與 -2 之間，因而失去部分分數。

數學甲與數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數<sup>1</sup>。本文說明正確的解題概念與步

---

<sup>1</sup> 吳家怡(民 93)，我的數學甲非選擇題得分了嗎。選才通訊，第 120 期。



驟，以及得部分分數與無法得分的可能情形，主要用意在於提供老師教學或學生平常練習時的參考。