

103 學年度指定科目考試數學乙考科非選擇題考生作答情形分析

第一處 陳慧美

每年指考成績單寄發後，有些考生認為自己的數學乙考科非選擇題，最後答案明明正確，為什麼無法得到該題的滿分，甚至 1 分未得？本文就此一疑問，說明本年度數學乙非選擇題僅得到部分題分或是 1 分未得的可能情形，以及數學科非選擇題給分的大原則，希望能藉此釐清部分考生的疑惑。以下各題會從兩方面進行分析，一是正確的解題步驟，二是考生解題的一些錯誤概念或解法，至於各題的參考解答可詳見 7 月 17 日中心網站公布的參考答案。

第一題：

題目：坐標平面上有三點 $O(0,0)$, $A(11,2)$, $B(23,18)$ 。直線 L 通過 A 點且與線段 \overline{AB} 垂直。

(1) 求直線 L 上與 A 點距離為 5 的兩點 C, D 之坐標。(8 分)

(2) 求 $\triangle OCD$ 的面積。(4 分)

分析：本題評量直線方向向量、參數式，與三角形面積公式，試題分成 2 小題。

第(1)小題

(一)正確解題步驟：

解 1：1. 因 $\overline{AB} = (12, 16) = 4(3, 4)$ ，又直線 L 通過 A 點且與線段 \overline{AB} 垂直，可知直線 L 的方向向量為 $(4, -3)$ 或 $(-4, 3)$ 。

2. 直線 L 方向上的單位向量為 $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 。

3. 由 $(11, 2) + 5\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = (15, -1)$ 及 $(11, 2) + 5\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = (7, 5)$ ，
得知： C, D 兩點的坐標為 $(15, -1), (7, 5)$ 。

解 2：1. 直線 L 通過點 $A(11, 2)$ 且方向向量 $(4, -3)$ ，可設直線 L 的參數式：

$$\begin{cases} x = 11 + 4t \\ y = 2 - 3t \end{cases}, \text{ 其中 } t \text{ 為實數。}$$

2. 由點 C, D 與 A 點相距距離為 5，可列式：

$$\sqrt{(11+4t-11)^2+(2-3t-2)^2}=5,$$

解得 $t=\pm 1$ ，可知： C, D 兩點的坐標為 $(15, -1), (7, 5)$ 。

解 3：列出聯立方程式 $\begin{cases} (x-23)^2+(y-18)^2=425 \\ (x-11)^2+(y-2)^2=25 \end{cases}$ 再解出 $(x, y)=(15, -1), (7, 5)$ 。

(二)錯誤概念或解法：

此小題僅得部分分數或未得分的幾種情形如下：

(A1)僅寫出直線 L 的正確斜率，或方向向量，或方程式，或參數式。

(A2)列出方程式，如： $\sqrt{(11+4t-11)^2+(2-3t-2)^2}=5$ ，但解錯 t 值。

(A3)列出聯立方程組，如： $\begin{cases} (x-23)^2+(y-18)^2=425 \\ (x-11)^2+(y-2)^2=25 \end{cases}$ ，但坐標解錯，或僅解

出一個坐標。

(A4)寫出正確答案，但理由不充分（僅寫出題幹所述與 A 點距離為 5），或未寫出任何理由，以致無法得分。

第(2)小題

(一)正確解題步驟：

解 1：利用行列式求 $\triangle OCD$ 面積。面積 $= \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 15 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \right| = 41$

解 2：利用外積求 $\triangle OCD$ 面積。面積 $= \frac{1}{2} |(7, 5, 0) \times (15, -1, 0)| = \frac{1}{2} |(0, 0, -82)| = 41$

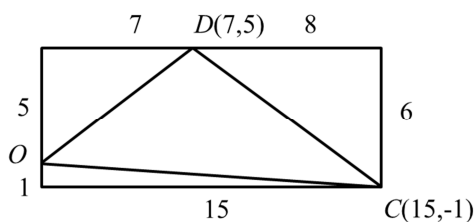
解 3：利用(底 \times 高) $\div 2$ 求 $\triangle OCD$ 面積 點 O 到直線 $L: 3x + 4y = 41$ 的距離為 $\frac{41}{5}$ ，

所以， $\triangle OCD$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{41}{5} = 41$

解 4：利用擴大矩形面積扣減 3 個小三角形面積求 $\triangle OCD$ 面積。如圖，將

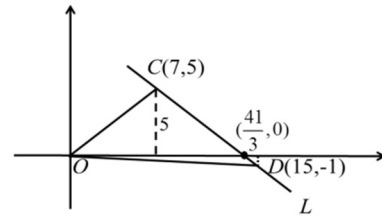
$\triangle OCD$ 擴大成一矩形，故 $\triangle OCD$ 面積

$$= 15 \times 6 - \frac{1}{2}(15 \times 1 + 7 \times 5 + 8 \times 6) = 41$$



解 5：利用切割成 2 個小三角形求 ΔOCD 面積。直線 $L: 3x + 4y = 41$ 的 x 軸截

距為 $\frac{41}{3}$ ，所以， ΔOCD 的面積 $= \frac{1}{2} \times \frac{41}{3} \times 5 + \frac{1}{2} \times \frac{41}{3} \times 1 = 41$



解 6：利用正弦值求 ΔOCD 面積。

$$\text{由 } \cos \angle COD = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OD}}{\overline{OC} \times \overline{OD}} = \frac{100}{\sqrt{226} \times \sqrt{74}},$$

$$\text{得知 } \sin \angle COD = \frac{82}{\sqrt{226} \times \sqrt{74}}, \text{ 故 } \Delta OCD \text{ 的面積}$$

$$= \frac{1}{2} \overline{OC} \times \overline{OD} \times \sin \angle COD = \frac{1}{2} \sqrt{226} \times \sqrt{74} \times \frac{82}{\sqrt{226} \times \sqrt{74}} = 41$$

(二)錯誤概念或解法：

此小題僅得部分分數或未得分的幾種情形如下：

(B1)利用(底 \times 高) $\div 2$ 求 ΔOCD 面積，雖算出點 O 到 L 的距離，但 \overline{CD} 長度計算

錯，如：算成 $\sqrt{(15-7)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{5}$ 。

(B2)寫出面積的行列式公式，但計算錯誤，如： $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 15 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times 68 = 34$ 。

(B3)欲利用正弦值求 ΔOCD 面積，但僅求出 $\cos \angle COD$ 值。

本題屬高二直線方程式、平面向量單元之試題，第(1)小題欲評量考生能否利用直線 L 方向上的單位向量、參數式列式求值。在第(2)小題欲評量三角形面積，考生可由行列式、外積、點到直線距離求解。在第(1)小題中，若考生只寫答案，而未有任意的理由將無法得分。數學科非選擇題主要評量用數學式清楚表達解題過程的能力，因此推理過程與說明是否正確、邏輯判斷是否合理，均為評定分數的重要依據。

第二題：

題目：某工廠可以買甲、乙兩種規格的鐵板來製作「熊大」徽章、「兔兔」徽章和「饅頭人」徽章。每塊甲規格的鐵板可以製作 8 個「熊大」徽章、4 個「兔兔」徽章及 8 個「饅頭人」徽章，每塊乙規格的鐵板可以製作 4 個「熊大」徽章、4 個「兔兔」徽章及 16 個「饅頭人」徽章。已知甲規格的鐵板每塊的成本為 400 元，乙規格的鐵板每塊的成本為 320 元；然而零售商需要 28 個「熊大」徽章、20 個「兔兔」徽章及 48 個「饅頭人」徽章。為了滿足零售商的需求，設工廠要買進 x 塊甲規格鐵板、 y 塊乙規格鐵板，其中 x 和 y 為非負整數，由下列步驟，求出何時才能達到最低成本。

- (1) 寫出此問題的線性規劃不等式及目標函數。(4 分)
- (2) 求可行解區域的所有頂點的坐標。(4 分)
- (3) 工廠所需最低成本為多少元？(4 分)

分析：本題評量線性規劃概念，考生可利用頂點法或平行線法求解。

第(1)小題

(一)正確解題步驟：

設工廠要買進 x 塊甲規格鐵板， y 塊乙規格鐵板。

1. 由甲規格的鐵板每塊的成本為 400 元，乙規格的鐵板每塊的成本為 320 元，得目標函數為 $p(x, y) = 400x + 320y$

2. 由題意知 x, y 需滿足下列聯立不等式：
$$\begin{cases} 8x + 4y \geq 28 \\ 4x + 4y \geq 20 \\ 8x + 16y \geq 48 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 2x + y \geq 7 \\ x + y \geq 5 \\ x + 2y \geq 6 \end{cases}$$

(二)錯誤概念或解法：

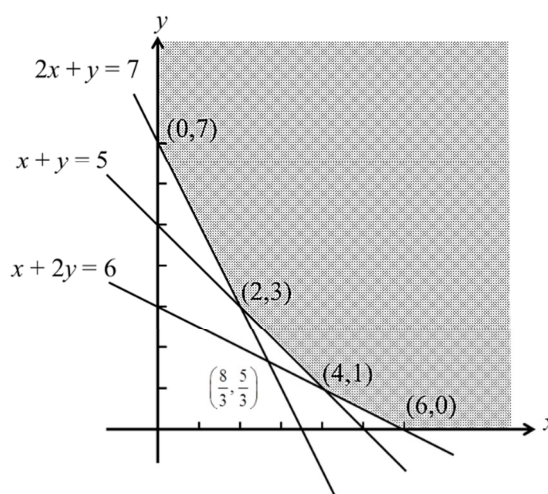
(C1)寫錯不等式，如：
$$\begin{cases} 8x+4y > 28 \\ 4x+4y > 20 \\ 8x+16y > 48 \end{cases} \text{，或} \begin{cases} 8x+4y \leq 28 \\ 4x+4y \leq 20 \\ 8x+16y \leq 48 \end{cases}。$$

(C2)未寫出目標函數 $p(x, y) = 400x + 320y$ ，或寫錯目標函數。

第(2)小題

(一)正確解題步驟：

由聯立不等式可繪出此可行解區域如下圖的灰色區域(含邊界)。其四個頂點坐標為 $(6,0), (4,1), (2,3), (0,7)$



(二)錯誤概念或解法：

(D1)標示錯誤可行解區域，以致可行解區域上的頂點寫錯，如：標示成頂

點 $(2,3)$ 、 $(4,1)$ 、 $(\frac{8}{3}, \frac{5}{3})$ 所圍的三角形區域。

(D2)在圖上標示出所有頂點，如： $(0,3)$ 、 $(0,5)$ 、 $(0,7)$ 、 $(2,3)$ 、 $(4,1)$ 、 $(\frac{8}{3}, \frac{5}{3})$ 、

$(\frac{7}{2}, 0)$ 、 $(5,0)$ 、 $(6,0)$ ，因考生未標示出可行解區域，以致無法判定哪些點為可行解區域的頂點坐標。

(D3)頂點坐標寫錯，或少寫一至二個頂點，其中最常發生錯誤的頂點為：

將 $(4,1)$ 寫成 $(1,4)$ ，或將 $(6,0)$ 寫成 $(5,0)$ 。

第(3)小題

(一)正確解題步驟：

解 1：

1. 將四個正確頂點代入目標函數求值

頂 點	(6,0)	(4,1)	(2,3)	(0,7)
$p(x,y) = 400x + 320y$	2400	1920	1760	2240

2. 比較大小可知：當 $x = 2, y = 3$ 時，工廠所需的最低成本為 $p(2,3) = 1760$ 元。

解 2：

畫出正確的可行解區域下（必須標示邊界，且在可行解區域畫斜線或陰影），當直線 $400x + 320y = k$ 在可行解區域掃動時，因目標函數所決定直線之斜率 $m = -\frac{5}{4}$ 介於 -1 與 -2 之間，故得知在當 $x = 2, y = 3$ 時，工廠所需的最低成本為 $p(2,3) = 1760$ 元。

(二)錯誤概念或解法：

(E1)認定最低成本發生的頂點為 $(2,3)$ ，未將可行解區域上另外三個頂點

$(6,0)$ 、 $(4,1)$ 、 $(0,7)$ 代入目標函數內比較。

(E2)利用頂點法求解，將頂點代入目標函數計算函數值作比較時，因計算

錯誤，而無法求得正確答案。

(E3)利用平行線法求解，但未說明目標函數所定直線之斜率 $-\frac{5}{4}$ 介於 -1 與 -2 之間。

(E4)利用平行線法求解，在利用直線 $400x + 320y = k$ 掃動時，因直線畫錯(即斜率錯誤)而找到錯誤頂點。

此題為線性規劃試題，在求出聯立不等式中，部分考生寫錯不等式組、

或將不等式組的符號寫錯，如：寫成
$$\begin{cases} 8x+4y>28 \\ 4x+4y>20 \\ 8x+16y>48 \end{cases}$$
，後續雖求出正確的頂點

與目標函數，且將可行解區域上的頂點代入比較，求得最大值，但仍無法得滿分。因考生一開始將情境問題轉換成數學式時，出現了錯誤的不等式組。

在寫出目標函數時，有部分考生未寫出或寫錯了目標函數，因此無法說明需買進多少塊甲規格、乙規格鐵板，才能達到最低成本。

在求最低成本時，多數考生是利用頂點法求解，其中常見的錯誤類型為：使用頂點法求解時，直接將頂點 (2,3) 代入目標函數中，即認定此時可達最低成本 1760 元，並未將可行解區域上另外三個頂點 (6,0)、(4,1)、(0,7) 代入目標函數中比較，以致無法由答案卷上得知最低成本所發生的點是如何求得，故無法得到滿分。另有少數考生在求可行解區域頂點時，因粗心算錯頂點坐標，而無法得到正確答案，或將正確頂點代入目標函數中作比較時，部分頂點計算錯誤而失去部分分數，實在可惜。

當考生能正確寫出不等式組、或將可行解區域正確標示出後，在第(3)小題中可利用「平行線法」求解。利用目標函數 $p(x,y)=400x+320y$ 所定直線之斜率為 $-\frac{5}{4}$ ，當直線 $400x+320y=k$ 在坐標平面上平移時，可知當買進甲規格鐵板 2 塊、乙規格鐵板 3 塊時，可達最低成本 1760 元。考生若利用平行線法求解，較常發生的錯誤為未標示出可行解區域、或直線 $400x+320y=k$ 畫錯而得到錯誤的頂點、或未說明目標函數所定直線之斜率 $-\frac{5}{4}$ 介於 -1 與 -2 之間，因而失去部分分數。

數學甲與數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀

念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數¹。本文說明正確的解題概念與步驟，以及得部分分數與無法得分的可能情形，主要用意在於提供老師教學或學生平常練習時的參考。

¹ 吳家怡(民 93)，我的數學甲非選擇題得分了嗎。選才通訊，第 120 期。