

104 學年度指定科目考試數學甲考科非選擇題考生作答情形分析

第一處 朱惠文

每年指考成績單寄發後，有些考生認為自己的數學甲非選擇題，答案明明正確，為什麼無法得到該題的滿分，甚至 1 分未得？本文就此一疑問，說明本年度數學甲非選擇題僅得到部分題分或是 1 分未得的可能情形，以及數學科非選擇題給分的大原則，希望能藉此廓清部分考生的疑惑。以下各題從兩方面進行分析，一是正確的解題步驟，二是考生解題的錯誤概念或解法，至於各題的參考解答可詳見 7 月 17 日中心網站公布的參考答案。

第一題：

題目：有一時鐘的時針長度為 5 公分，分針長度為 8 公分。假設時針針尖每分鐘所移動的弧長都相等。

- (1) 試求時針針尖每分鐘所移動的弧長。(3分)
- (2) 已知時針針尖與分針針尖距離為 7 公分，求時針和分針所夾的角度。(4分)
- (3) 試問在六點與六點半之間，時針針尖與分針針尖的距離最接近 7 公分是在六點幾分(取至最接近的整數分鐘)？(4分)

分析：此題結合生活中的時鐘，評量三角函數的能力。

第(1)小題

(一)正確解題步驟：

時針針尖每分鐘轉動角度為 $\frac{\pi}{360}$ 或 0.5° ，故弧長為 $5 \times \frac{\pi}{360} = \frac{\pi}{72}$ 公分

(二)錯誤概念或解法：

(A1) 轉動角度錯誤：例如誤以為時針轉動角度為 $\frac{2\pi}{60}$ 。

(A2) 弧長公式錯誤：例如列出 $5 \times 2 \times \frac{\pi}{360}$ 或誤認 $\frac{\pi}{360}$ 即為弧長。

第(2)小題

(一)正確解題步驟：

利用餘弦定理得 $\cos \theta = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} = \frac{1}{2}$ ，解得 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 或 60° 。

(二)錯誤概念或解法：

(B1) 餘弦定理錯誤：例如 $|\cos \theta| = \left| \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} \right| = \frac{1}{2}$ 或 $\cos \theta = \pm \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8}$ 。

(B2) 餘弦值轉換角度錯誤：例如 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ，寫出 $\theta = 120^\circ$ 或 30° 。

(B3) 算出高為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，寫出 $\theta = 60^\circ$ 、 120° ，但沒有明確說明為何 120° 不合。

(B4) 計算錯誤：例如 $\cos \theta = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} = -\frac{1}{2}$ 。

第(3)小題

(一)正確解題步驟：

分針每分鐘轉動 $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$ ；時針每分鐘轉動角度為 0.5° ，依題意列出

算式 $6^\circ x + (60 - 0.5^\circ x) = 180$ ，推得 $x = \frac{240}{11} = 21\frac{9}{11} \approx 21.8$ ，最接近的整數

分鐘為 6 點 22 分。以上算式也可利用弧度得出。

(二)錯誤概念或解法：

(C1) 列式錯誤：例如 $180 - (6 - 0.5^\circ)x = 180$ 或 $180^\circ - (6^\circ - 0.5^\circ)x = 30^\circ$ 。

(C2) 利用列舉，但沒有正確的算式：例如列舉 18 分、19 分、... 至 22 分，但沒有正確的說明為何 6 點 22 分是最接近 7 公分。

(C3) 計算錯誤：例如 $\frac{240}{11} \approx 11.8$ 。

第二題：

題目：設無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 符合 $a_0 = 0$ 且當 $n \geq 1$ 時，滿足

$$a_n - a_{n-1} = \begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^n, & \text{當 } n \text{ 為偶數,} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n, & \text{當 } n \text{ 為奇數.} \end{cases}$$

(1) 將 a_6 寫成兩個等比級數的差，其中一個有 6 項，另一個有 3 項。(2 分)

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$ 的值。(3 分)

(3) 證明當 $n \geq 0$ 時， $a_{2n+2} - a_{2n} < 0$ ，並依此說明對於所有正整數 n ，不等

$$\text{式 } -\frac{1}{8} \leq a_{2n} < 0 \text{ 恆成立。 (8 分)}$$

分析：此題評量數列及極限的基本性質。

第(1)小題

(一)正確解題步驟：

$$a_6 = \left[\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^4 + \left(\frac{1}{5}\right)^5 + \left(\frac{1}{5}\right)^6 \right] - \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 \right]$$

(二)錯誤概念或解法：

(D1) 列式錯誤：例如 $a_6 = \left[\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^4 + \left(\frac{1}{5}\right)^5 + \left(\frac{1}{5}\right)^6 \right] + \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 \right]$ 或

$$a_6 = \sum_{k=0}^{k=5} \left(\frac{1}{5}\right)^k - \sum_{k=0}^{k=2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}。$$

(D2) 沒有依題意列式：例如

$$a_6 = \left[\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^4 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^5 + \left(\frac{1}{5}\right)^6 - \left(\frac{1}{3}\right)^5 \right]。$$

第(2)小題

(一)正確解題步驟：

$$a_{2n} = \left[\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^{2n} \right] - \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^{2n} \right] - \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} \right]$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{8}$$

(二)錯誤概念或解法：

(E1) 公比錯誤：誤以為公比為 $\frac{1}{3}$ ，因而列式得 $\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$ 。

(E2) 計算錯誤：例如 $\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$ 。

第(3)小題

(一)正確解題步驟：

此題可分為兩步驟，第一個步驟是證明 $a_{2n+2} - a_{2n} < 0$ ，可利用指數律或數學歸納法。第二個步驟是利用 $a_{2n+2} - a_{2n} < 0$ 、 $a_0 = 0$ 與第(2)小題所得結果，說明不等式 $-\frac{1}{8} \leq a_{2n} < 0$ 恆成立。

(二)錯誤概念或解法：

(F1) 化簡 $a_{2n+2} - a_{2n}$ 錯誤：例如 $a_{2n+2} - a_{2n} = (\frac{1}{5})^{2n+2} + (\frac{1}{5})^{2n+1} - (\frac{1}{3})^{2n}$ 或

$$\frac{6}{5}(\frac{1}{5})^{2n+1} + (\frac{1}{3})^{2n+1})。$$

(F2) 證明理由不夠充分：例如只利用 $\frac{6}{5}(\frac{1}{5})^{2n+1} - (\frac{1}{3})^{2n+1}$ 並無法說明 $a_{2n+2} - a_{2n} < 0$ ，

須化簡至 $\frac{6}{25}(\frac{1}{5})^{2n} - \frac{1}{3}(\frac{1}{3})^{2n}$ 或 $\frac{6}{125}(\frac{1}{5})^{2n-1} - \frac{1}{9}(\frac{1}{3})^{2n-1}$ ；若利用數學歸納法，須

化簡至 $(\frac{1}{5})^2 [a_{2k+2} - a_k]$ 或明確利用 $n = k$ 證得 $n = k + 1$ 成立；若利用指數律證

明，也須化簡至 $\frac{6}{5} < \left(\frac{5}{3}\right)^{(2n+1)}$ 。

(F3) 說明理由不夠完整：例如只寫出 $a_{2n+2} < a_{2n}$ ，但未寫出 $a_0 = 0$ ，無法說明

$a_{2n} < 0$ 或只寫出 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = -\frac{1}{8}$ ，但未寫出 $\{a_{2n}\}$ 為遞減，無法說明 $-\frac{1}{8} \leq a_{2n}$ 。

數學甲與數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生能否夠清楚表達正確的算式與推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得出正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。本文說明正確的解題概念與步驟，以及得部分分數與無法得分的可能情形，主要用意在於提供老師教學或學生平常練習時的參考。