

# 一道有關凹凸性的證明—兼論使用泰勒展開的一個易錯點

Q: 若  $f''(x) > 0$  對任意  $x \in \mathbb{R}$  皆成立，試證

$$f(x) \geq f(0) + f'(0)x$$

恆成立。

A: 在《白話微積分》3.4 函數的單調性與凹凸性中 (第 174 頁)，介紹了八個有關函數凹凸性的不同定義，彼此不完全等價。其中定義 6 為：

## 定義 1

若函數  $f(x)$  在區間  $I$  上可導，且對於任意  $x_0 \in I$  皆滿足

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

即曲線  $y = f(x)$  的切線恆在曲線下方，則  $f(x)$  在區間  $I$  上是凸函數。

而定義 8 為：

## 定義 2

若函數  $f(x)$  在區間  $I$  上二次可導，且  $f''(x) \geq 0$  恆成立，則  $f(x)$  在區間  $I$  上是凸函數。

回頭看此題，只是特別取  $x_0 = 0, I = \mathbb{R}$ ，其實就等同於要我們證明：

## 定理 1

若  $f(x)$  在區間  $I$  上二次可導，則定義 6 可推得定義 8。

證明方法容易。

(1) 當  $x = 0$ ，顯然成立。

(2) 對於  $x > 0$ ，因為  $f''(x) \geq 0$  恆成立，故  $f'(x)$  在  $\mathbb{R}$  上遞增。

$f(x)$  為處處連續、處處可微，由拉格朗日微分均值定理：

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c), 0 < c < x$$

$f'(x)$  遞增，故  $f'(c) \geq f'(0)$ ，結合上式得

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq f'(0)$$

再移項就有

$$f(x) \geq f(0) + f'(0)x$$

(3) 對於  $x < 0$ ，仿上論述即可。 ■

值得注意的是，某個補習班老師在網上回答問題時，犯了這樣的錯：

使用泰勒展開：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots$$

利用  $f''(x) \geq 0$  恆成立，並略去三次以上諸項得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &\geq f(0) + f'(0)x \end{aligned}$$

這樣做有什麼問題？

學數學的時候千萬要搞清楚每一個解題步驟如此操作的前提、目的、效果，對於一些公式、定理的使用時機也務要搞清楚。

回想當我們學習泰勒展開的應用，我們是何時略去高次項？是在  $x \rightarrow 0$  的時候！

當中道理其實非常簡單，就是因為  $x$  小， $x$  的高次就非常小，小到我們可以忽略。那我們現在要證明的，是對於所有實數  $x$ ，這時候怎麼能隨便忽略呢？

深究一下那位補習班老師犯錯的原因，可能是我們平常習慣展開幾項之後，後面就寫“...”，寫慣了點點點，於是就容易亂忽略。

相較於這種隨性的點點點寫法，《白話微積分》在第 464 頁介紹了皮亞諾型餘項的寫法，使得我們對於這種略去高次項的寫法有了進一步改進。

若以本題來說，我們可寫成

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

何謂  $o(x^2)$ ？當  $x \rightarrow 0$  時，它跑到 0 跑得比  $x^2$  還要快！也就是說，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = o(x^2)$$

如果乖乖地使用皮亞諾型餘項的寫法，明確地寫出  $o(x^2)$  了，或許就不會犯這種低級錯誤了吧。

話說回來，要使用泰勒展開來證此題還是可以，只要善用拉格朗日型餘項：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(c)}{2!}x^2, \quad 0 < c < x$$

利用  $f''(x) \geq 0$  恆成立，使得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(c)}{2!}x^2 \\ &\geq f(0) + f'(0)x \end{aligned}$$