做數學科歷屆題之意義

卓永鴻 提供

數學科的歷屆試題很值得反復做幾遍、多用心思考，而且建議越早做越好。以我個人來說，我在升高三的暑假，就已經拿當年七月剛出爐的指考數學科來看。

許多同學會說，想要考前再做，看看自己實力到哪裡。也有許多同學說，大考題做過了，就不想再寫，因為一看到題目就知道怎麼做了。

其實做歷屆試題的用意，並不在於把正確答案做出來，也不在於用寫完的成績推測自己正式上場會得幾分[1]，更不在於冀望考出一模一樣的題目出來。以下我稍列舉一些做歷屆試題的好處。

一：掌握近年趨勢

最近二十幾年來不停地教改，我們姑且不討論教改的手段與成效如何，其精神是希望同學可以真正培養學科能力。那些制定課綱與大考命題的都是大學的教授，他們在大學授課時，實際地感受到許多同學只是背題型解法而沒有真正具備數學素養，因此在制定課綱時會不斷強調學生須培養的幾項核心能力，並且在課綱中不斷出現如下文字：「避免繁瑣運算」、「能進行某種運算，但不要過度延伸為人工化難題。」而且大考的命題也是出得越來越活，解題所需能力也越來越偏向正確的數學概念與能力，而非背題型解法或是純操弄算式。

以下我列舉幾題歷年大考題，讓你感受一下：

例題 1

若 $x^2+1=x$，試求 $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ 之值。

44 乙丙

例題 2

設 a,b,c 為實數，$a\neq 0$，令 $f(x)=ax^2+bx+c$，其判別式 $D=b^2-4ac$，則對於所有實數 x，$f(x)>0$ 之充要條件為 (甲) $a>0,\ D<0$ (乙) $a>0,\ D=0$ (丙) $a>0,\ D>0$ (丁) $a<0,\ D<0$ (戊) $a<0,\ D=0$ (己) $a<0,\ D>0$

59 甲乙丙丁

[1] 其實根本不能推測得準，原因一是每年難度不盡相同；原因二是你現在寫題目與考場上寫的感覺其實差很多，除了少數心理素質夠硬的同學外，很多人其實會受臨場因素影響；原因三是許多題目早在之前上課或平常練習就碰面過了，其實早就不準了。

例題 3

設 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = 3x - 5y \end{cases}$，今可將 x, y 解出：$\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$，則

(A) $a + b > 0$ (B) $a + b < 0$ (C) $ab - bc < 0$

(D) $ad - bc = 0$ (E) $ad - bc > 0$

65 自然

例題 4

設 $f(x) = x^4 + 7x^3 + 11x^2 - 3x - 18$，求 $\beta = f(f(1)) = ?$

71 甲乙丙丁

例題 5

令 $a = \log 2,\ b = \log 3$，試將下列數值以 a 與 b 表示。

(1) $\log_5 72$ (2) $\log_6 \sqrt{5}\left(\sqrt{14 - 4\sqrt{6}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)$

83 二三四類組

然後再看看近幾年的題目出法：

例題 6

令 $A(-2, 0)$、$B(0, 1)$、$C(2, 1)$、$D(4, 3)$ 為坐標平面上四點。請選出正確的選項。

(1) 恰有一直線通過 A、B、C 三點。

(2) 恰有一圓通過 A、B、D 三點。

(3) 恰有一個二次多項式函數的圖形通過 B、C、D 三點。

(4) 恰有一個三次多項式函數的圖形通過 A、B、C、D 四點。

(5) 可以找到兩平行直線，其聯集包含 A、B、C、D 四點。

102 年指考甲

例題 7

下表是某國在 2009 年至 2015 年間，運動選手的人數統計：

年份	男生	女生
2009	3410	1950
2010	3420	2000
2011	3540	2240
2012	3710	2370
2013	3830	2650
2014	3920	2780
2015	3990	2860

關於該國運動選手，請根據這張表選出正確的敘述。

(1) 從 2009 年到 2015 年，男運動選手增加的總人數比女運動選手增加總人數多

(2) 從 2009 年到 2015 年，平均一年增加了 580 名男運動選手

(3) 從 2009 年到 2015 年，男女運動選手人數差距逐年持續縮小

(4) 如果分別計算男女運動選手人數對年份的迴歸直線（最適直線），則男生的直線斜率小於女生的直線斜率

(5) 從 2009 年到 2015 年共七年中，全國平均一年有超過 6000 名運動選手

104 數乙

例題 8

下面是甲、乙兩個商場的奇異果以及蘋果不同包裝的價格表，例如：甲商場奇異果價格「35/ 一袋 2 顆」表示每一袋有 2 顆奇異果，價格 35 元。

甲商場價格

奇異果價格	20 元/一袋 1 顆	35 元/一袋 2 顆	80 元/一袋 5 顆	100 元/一袋 6 顆
蘋果價格	45 元/一袋 1 顆	130 元/一袋 3 顆	260 元/一袋 6 顆	340 元/一袋 8 顆

乙商場價格

奇異果價格	18 元/一袋 1 顆	50 元/一袋 3 顆	65 元/一袋 4 顆	95 元/一袋 6 顆
蘋果價格	50 元/一袋 1 顆	190 元/一袋 4 顆	280 元/一袋 6 顆	420 元/一袋 10 顆

依據上述數據，請選出正確的選項。

(1) 在甲商場買一袋 3 顆裝的蘋果所需金額低於買三袋 1 顆裝的蘋果

(2) 乙商場的奇異果售價，一袋裝越多顆者，其每顆單價越低

(3) 若只想買奇異果，則在甲商場花 500 元最多可以買到 30 奇異果

(4) 如果要買 12 顆奇異果和 4 顆蘋果，在甲商場所需最少金額低於在乙商場所需最少金額

(5) 無論要買多少顆蘋果，在甲商場所需最少金額都低於在乙商場所需最少金額

105 學測

例題 9

甲先生、乙先生、丙先生、丁先生四位男士以及 A 小姐、B 小姐、C 小姐、D 小姐四位女士想要混搭兩部計程車，每車載有四名乘客。已知：

（一） 甲先生與 A 小姐同車

（二） 乙先生與 B 小姐同車

（三） C 小姐與 D 小姐 不同 車

請選出正確的選項。

(1) A 小姐與 D 小姐必不同 車

(2) 甲先生與 B 小姐必不同 車

(3) 乙先生與丙先生必同車

(4) 如果乙先生與丁先生同車，則丙先生與 B 小姐必同車

(5) 如果 D 小姐與乙先生同車，則 C 小姐與 A 小姐必同車

105 數乙

應當可以感受到，近年來的考法是越來越活，很多都是新的題目，以前沒看過的。解題是更要求正確的觀念與靈活的數學思維，不像以前常是操弄算式的硬功夫[2]。既然大考近年來的考題趨勢不同以往，那麼對大多數同學來說[3]，當然儘可能別過度花時間在老式考法上面。

二：幫自己找出弱項並補強

許多同學對於學習狀況的描述太過模糊，比方說他會自述：我多項式很不好、我平面向量很差，甚至有人直接說：我數學很差。這樣的敘述太過模糊，既無助於讓老師幫

[2]現在仍要具備處理算式的技能，但已不如以往那麼硬。

[3] 程度較好的同學，為了提高考滿分的機會，多練練各種不同題型也是一種手段。但大多數同學尚未完全掌握基本概念與運算能力，還是應該先針對考題趨勢作準備。

助你，也不利自己對自己弱點針對性補強。舉個例子，曾有一位同學告訴我他三角函數那邊不太會，但我幫他複習了幾個三角函數的概念，他卻又說他會。追根究底之後，原來他所感到不擅長的，是複數平面的部份，而且不是整個複數平面相關的都不會，是特別指利用幾何圖形解複數問題的題目。像這樣就是一個過度模糊的描述，如果不是我追問出真正問題所在，那麼我給與的協助就會不在刀口上。精確、舉體地自我分析學習狀況、問題所在，才能幫助自己針對性地補強，以及讓老師能給與協助。而做歷屆試題的另一個用意，是可以檢視自己還有什麼觀念不會或較薄弱。當然你不管做哪種試題都能有此種效果，但歷屆試題是真實在近年大考考出來的，所以你檢視的是近年來曾考過但你還不熟的部份。例如在多項式函數這一主題，我們可以發現像根與係數、有理根檢驗法、虛根成對等等，這些是經常出現的，既然在近年大考出現不止一次，那你就知道你一定要弄熟。另外像是排列組合與平面向量這兩個主題，仔細看看近年來考這兩單元的試題，可以發現平常練習的題目難度已遠超現在的考法。當我們先熟悉近年大考題，才更有利平常的讀書規劃，先努力搞懂哪些部份，哪些題目偏老式先放著。

三：大考題目出得好，值得反復檢討

做歷屆試題的第三個好處，是透過對同一題的反復檢討，可以更消化解題的策略，也可透過對同一題的不同解法，訓練自己看問題看得更深入、能從多方角度下手。這就好比在武俠小說中，不斷磨練自己刀法，讓自己面對對手出招，自己能有許多種出刀方式可以應對，而不是只有直劈橫砍，還砍不贏。

以下具體舉一個檢討題目的方式給你看：

例題 10

設 $a<b<c$，已知實係數多項式函數 $y=f(x)$ 的圖形為一開口向上的拋物線，且與 x 軸交於 $(a,0)$、$(b,0)$ 兩點；實係數多項式函數 $y=g(x)$ 的圖形亦為一開口向上的拋物線，且跟 x 軸相交於 $(b,0)$、$(c,0)$ 兩點。請選出 $y=f(x)+g(x)$ 的圖形可能的選項。

(1) 水平直線

(2) 和 x 軸僅交於一點的直線

(3) 和 x 軸無交點的直線

(4) 和 x 軸僅交於一點的拋物線

(5) 和 x 軸交於兩點的拋物線

102 學測

解

許多同學都是對最後兩個選項有問題，這題的詳解大多都是像這樣寫：

依題意設 $f(x) = n(x-a)(x-b)$ 及 $g(x) = m(x-b)(x-c)$，其中 $n, m > 0$。

則 $f(x) + g(x) = (n+m)x^2 + \cdots$，領導係數 $n+m > 0$，

可知其必為開口向上且過 $(b, 0)$ 點的拋物線，故不選 (1)(2)(3) 。

$$\begin{aligned} \text{由 } f(x) + g(x) &= n(x-a)(x-b) + m(x-b)(x-c) \\ &= (x-b)\left[n(x-a) + m(x-c)\right] \\ &= (x-b)\left[(n+m)x - (na+mc)\right] \end{aligned}$$

得知 $f(x) + g(x)$ 有兩根 $x = b$ 與 $x = \dfrac{na+mc}{n+m}$。

若 $b = \dfrac{na+mc}{n+m}$，則為重根，否則為兩相異實根。故選 (4)(5)。

■

這樣的解法應該許多同學可以明白，但要自己看到題目後這樣寫出來或許不易。所以我們就可以多反復回來看這題，重新跑幾遍解題流程，用心體會每一個步驟，也許就能慢慢消化這當中的精神，理解並為己用。也可以再試著努力思索，還可以從哪個角度切入？

仔細想想，最後兩個選項的區別就在於重根或兩相異根。換句話說，就是頂點是否正好在 x 軸上。因我們已知會過 $(b, 0)$，所以再換句話說，頂點是否正是 $(b, 0)$？一有了這個方向後，我們就動手檢驗頂點的 x 座標 [4]，看是否剛好等於 b ：

解 2

寫 $f(x) + g(x) = (n+m)x^2 + \big(-n(a+b) - m(b+c)\big)x + (nab + mbc)$，

則頂點 x 座標 $\dfrac{na+nb+mb+mc}{2(n+m)}$ 。

要看它是否正好等於 b，所以解

$$b = \frac{na+nb+mb+mc}{2(n+m)}$$

$$\Rightarrow b = \frac{na+mc}{2(n+m)} + \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{na+mc}{n+m}$$

這樣便解出相同結論，若 $b = \dfrac{na+mc}{n+m}$ 即重根，否則為兩相異根。

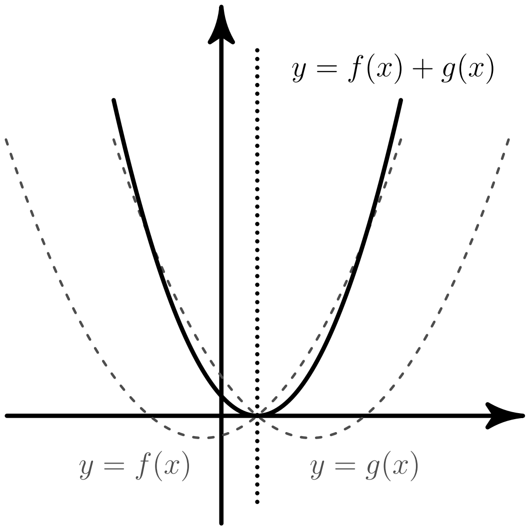
■

[4] 對於二次式 $ax^2 + bx + c$，對稱軸為 $x = -\dfrac{b}{2a}$，就是頂點的 x 座標。

就這樣，我們成功地利用頂點來判斷 (4)(5)。再想想，可不可以不要寫這麼複雜的式子呢？因為這是選擇題，我們只是要驗證選項正確與否，所以若能為 (4)(5) 找出具體的例子，就能說明它們有可能。我們可利用對稱的觀念：

解 3

欲使對稱軸為 $x = b$，我們就讓 $f(x)$ 與 $g(x)$ 兩者完全對於 $x = b$ 對稱。只要設 a, b, c 為成等差的三個數，並且 $f(x)$, $g(x)$ 開口大小一樣大 (即 $n = m$)，如下圖所示。



舉具體例子，取 $a = -1,\ b = 0,\ c = 1$，並取 $f(x) = (x+1)x,\ g(x) = x(x-1)$，則 $f(x) + g(x) = 2x^2$ 和 x 軸只交於 $(0, 0)$。若改取 $c = 2$，則 $g(x) = x(x-2)$，$f(x) + g(x) = 2x^2 - x$，與 x 軸交於兩點。故 (4)(5) 都有可能。

■

我們成功地設計 a, b, c 來分別給出符合 (4)(5) 的 $f(x) + g(x)$，利用的是對稱的概念。再尋思之，能不能直接先對 (4)(5) 各設計一個 $f(x) + g(x)$，然後再拆出合理的 a, b, c ？

解 4

以 (4) 來說，設計 $f(x) + g(x) = 2x^2$，拆為 $f(x)$ 與 $g(x)$ 時，拆成 $f(x) = x^2 + 2x$ 及 $g(x) = x^2 - 2x$，便有 $f(x) = x(x+2),\ g(x) = x(x-2) \Rightarrow a = -2,\ b = 0,\ c = 2$，所以 (4) 是有可能的。至於 (5)，設計 $f(x) + g(x) = 2x(x+1)$ 有兩相異實根，拆 $2x(x+1) = x(2x+2) = x\Big[(x+3) + (x-1)\Big] = x(x+3) + x(x-1)$，則 $a = -3,\ b = 0,\ c = 1$，也有可能。

■

方法實在很多，反正這種問有沒有可能的，我們就直接硬搞出實際例子出來，就可以安心選了。

如上所示，你可以像這樣對題目進行深度審視，好好想想如何剖析問題，訓練自己多方切入。就算沒想出別的解法也沒有關係[5]，對一個解法反復看，重新跑一遍解題的流程，好好消化吸收，想想自己如何把這個解法技巧吸收起來、用在別的題目上，也想想有沒有可能有什麼類似的考法，順便準備一下。

四：觀察一個主題歷年來怎麼考

我們可以看同一個主題在歷年來是怎麼出的，以便自己在考前將重心擺在易考的部份，這點對於自認數學程度中下的同學尤為重要。以多項式主題為例：

例題 11

多項式 $4(x^2+1)+(x+1)^2(x-3)+(x-1)^3$ 等於下列哪一個選項？

(1) $x(x+1)^2$ (2) $2x(x-1)^2$ (3) $x(x-1)(x+1)$ (4) $2(x-1)^2(x+1)$ (5) $2x(x-1)(x+1)$

100 學測

解

分別代 $x=0,\pm1$，原式皆為 0，由因式定理知原式必含因式 $x(x+1)(x-1)$，故為 (3) 或 (5)。原式之領導係數顯然為 2，故選 (5)。

■

這題當然也可以硬爆，但如果不想花太多時間的話，這題須靈活使用因式定理，題目沒明白告訴你透過因式來判斷，你要自己懂得用！

例題 12

設 $f(x)=x(x-1)(x+1)$，請問下列哪些選項是正確的？

(1) $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$

(2) $f(x)=2$ 有整數解

(3) $f(x)=x^2+1$ 有實數解

(4) $f(x)=x$ 有不等於零的有理數解

(5) 若 $f(a)=2$，則 $f(-a)=2$

100 學測

[5]其實大考題我們很容易取得多種版本的詳解版本，所以想不到時找一下就好了。

解

(1) × $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\text{正}}\right)\left(\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}^{\text{負}}\right)\left(\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}^{\text{正}}\right)<0$

(2) × 已知 $f(0)=f(1)=f(-1)=0$，若有整數解必為 2 以上或 -2 以下，但 $f(2)=2\cdot1\cdot3=6>2$，再往上代，$f(3),\ f(4)$ 只會更大，故不可能等於 2。若往 -2 以下代，則皆為負，同樣不可能等於 2。

(3) ○ 移項得 $g(x)=f(x)-x^2-1=0$，因 $g(x)$ 是三次實係數多項式，必有實根。

(4) × $\cancel{x}(x-1)(x+1)=\cancel{x}\quad\Rightarrow x^2-1=1\quad\Rightarrow x^2=2\quad\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

(5) × $f(-a)=-a(-a-1)(-a+1)=-a[-(a+1)][-(a-1)]=-a(a-1)(a+1)=-f(a)$

■

選項 (1) 直接簡單判斷各項正負，而不硬算出其值。很多大考題都有這種特色，要特別注意這種省力、簡潔的解法。選項 (3) 是平時練習中很常見的，先移項再利用奇次多項式必有實根。至於其它選項，都只是依選項敘述簡單處理一下式子而已。

例題 13

設 $f(x)=x^4-5x^3+x^2+ax+b$ 為實係數多項式，且知 $f(i)=0$（其中 $i^2=-1$）。請問下列哪些選項是多項式方程 $f(x)=0$ 的根？

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 5

101 學測

解

$f(x)$ 為實係數多項式，且 $f(i)=0$，則 $f(-i)=0$，故 $f(x)$ 有二次因式 x^2+1。
將 $f(x)$ 分解成 $f(x)=(x^2+1)(x^2-5x)=(x^2+1)x(x-5)$，可知選 (1)(2)(5)。

■

這題考虛根成對定理，並再因式分解一下答案就出來了。

102 學測在上面出現了，因此這裡略過。

例題 14

設 $f(x)$ 為實係數二次多項式，且已知 $f(1)>0$、$f(2)<0$、$f(3)>0$。令 $g(x)=f(x)+(x-2)(x-3)$，請選出正確的選項。

(1) $y = f(x)$ 的圖形是開口向下的拋物線

(2) $y = g(x)$ 的圖形是開口向下的拋物線

(3) $g(1) > f(1)$

(4) 若 $g(x) = 0$ 在 1 與 2 之間恰有一個實根

(5) 若 α 為 $f(x) = 0$ 的最大實根，則 $g(\alpha) > 0$

103 學測

解

(1) × 由 $f(1), f(2), f(3)$ 的正負號易知 $f(x)$ 為開口朝上的拋物線。

(2) × $f(x)$ 為開口朝上的拋物線，故其二次係數為正，則 $g(x)$ 的二次係數也是正的。

(3) ○ $g(1) = f(1) + (1-2)(1-3) = f(1) + 2 > f(1)$

(4) ○ $g(1) > f(1) > 0,\ g(2) = f(2) + 0 < 0$。

(5) × 因 $2 < \alpha < 3$，故 $g(\alpha) = f(\alpha) + (\alpha-2)(\alpha-3) < 0$。

■

各個選項都是些簡單判斷而已，其中選項 (4) 利用了勘根定理。但你不能光是看了覺得判斷很簡單，仔細想想，你要如何在考場上想到？

例題 15

設 $f(x)$ 是首項係數為 1 的實係數二次多項式。請選出正確的選項。

(1) 若 $f(2) = 0$，則 $x - 2$ 可整除 $f(x)$

(2) 若 $f(2) = 0$，則 $f(x)$ 為整係數多項式

(3) 若 $f\left(\sqrt{2}\right) = 0$，則 $f\left(-\sqrt{2}\right) = 0$

(4) 若 $f(2i) = 0$，則 $f(-2i) = 0$

(5) 若 $f(2i) = 0$，則 $f(x)$ 為整係數多項式

104 學測

解

(1) ○ 因式定理。

(2) × 不一定，例如 $f(x)=(x-2)(x-\pi)$，便有 $f(2)=0$。

(3) × 不一定，$f(x)$ 須為有理係數才能保證。例如 $f(x)=(x-\sqrt{2})(x-1)$ 即為反例。

(4) ○ 虛根成對定理。

(5) ○ 承 (4)，$f(2i)=f(-2i)=0$。則 $f(x)=x^2+4$，為整係數多項式。

■

這題很有大考特色，同一題考了因式定理、虛根成對定理等等，另外像選項 (2) 這種純粹胡說八道，簡單舉例反駁就好了。

例題 16

設 a、b、c 皆為正整數，考慮多項式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+2$。請選出正確的選項。

(1) $f(x)=0$ 無正根

(2) $f(x)=0$ 一定有實根

(3) $f(x)=0$ 一定有虛根

(4) $f(1)+f(-1)$ 的值是偶數

(5) 若 $a+c>b+3$，則 $f(x)=0$ 有一根介於 -1 與 0 之間

105 學測

解

(1) ○ 係數皆為正，必無正根。

(2) × 不一定，反例如 $f(x)=(x^2+x+x)(x^2+x+2)$。

(3) × 不一定，反例如 $f(x)=(x+1)^3(+x+2)$。

(4) ○ 偶次係數和為 $\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$ 必為整數 $\Rightarrow f(1)+f(-1)$ 必為偶數。

(5) ○ $f(0)=2>0,\ a+c>b+3\ \Rightarrow 1-a+b-c+2<0\ \Rightarrow f(-1)<0$

由勘根定理，必有一根介於 -1 與 0 之間。

■

選項 (1) 是歷年大考中出現不只一次的簡單概念，既然係數皆正，則正數 x 代進去後，$f(x)$ 算出來必為正，這樣怎麼可能有正根呢？選項 (2)(3) 一看就知道是錯的，因為題目只告訴我們領導係數與常數項，中間有三項都不知道，這樣它居然還斷言有實根、有虛根！又是一個胡說八道，簡單舉例子反駁。選項 (4) 利用了偶次係數和，其實忘記這個也沒關係，自己代 $x=\pm1$ 寫寫看就知道是偶數了。選項 (5)，勘根定理，又見面了。

附錄

關於課綱中所明確指出不宜有的題型，具體摘幾項如下：

- 乘法公式及其逆運算（如：立方和、立方差），此處不要延伸為複雜的因式分解。

- 指數化簡不宜太過複雜或太人工化，下列題型不適宜：
  化簡 $\left(x^{\frac{a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{c-a}}\cdot\left(x^{\frac{b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\cdot\left(x^{\frac{c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{b-c}}$

- 二項式定理：利用組合的概念推導出 $(x+y)^n$ 展開式中一般項的形式，應處理生活中二項式展開的問題，不宜延伸做人工化的例題，如：求 $\left(x^2+\dfrac{1}{x}+1\right)^5$ 中 x 的係數。

- 不宜含特殊技巧的行列式題型，如：$\begin{vmatrix} a^2+1 & ba & ca \\ ab & b^2+1 & cb \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$、$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & a+c & cb \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$。

是否覺得上面列舉的有些面熟呢？