1.7 等价无穷小代换

1.7.1 动机介绍

当我们练习极限题有点心得后，慢慢能熟练地直接使用已知的极限来解题。例如：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\\
&\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}=1\times 1\\
&\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{-x}{\ln(1-x)}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

上面这样写，算是比较熟练、简洁了。但我们不甘心于此，现在要将境界再更提升，由熟练走向老练，让过程更为简化。

如果你觉得没必要，我们来看下面这题比较疯狂点的：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-2x^4}}{x\big(1-\cos(x)\big)\tan\big(\sin(x)\big)}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x\cdot 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\tan\big(\sin(x)\big)}\cdot\left(1-\frac{\sqrt[3]{1-2x^4}-1}{\sqrt{1+x^4}-1}\right)\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x\cdot 2}\cdot\frac{\sqrt{1+x^4}+1}{\sqrt{1+x^4}+1}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{\sin(x)}{\tan\big(\sin(x)\big)}\cdot\frac{x}{\sin(x)}\\
&\quad\cdot\frac{4}{x^3}\cdot\left(1-\frac{\sqrt[3]{1-2x^4}-1}{\sqrt{1+x^4}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x^4}+1}{\sqrt{1+x^4}+1}\cdot\frac{1+\sqrt[3]{1-2x^4}+\sqrt[3]{(1-2x^4)^2}}{1+\sqrt[3]{1-2x^4}+\sqrt[3]{(1-2x^4)^2}}\right)\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x\big(\sqrt{1+x^4}+1\big)}\cdot 1^2\cdot 1\cdot 1\\
&\quad\cdot\frac{4}{x^3}\cdot\left(1-\frac{-2x^4}{x^4}\cdot\frac{\sqrt{1+x^4}+1}{1+\sqrt[3]{1-2x^4}+\sqrt[3]{(1-2x^4)^2}}\right)\\
=&\frac{1}{4}\cdot 1\cdot 4\cdot(1+\frac{4}{3})=\frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

别说让你慢慢做出来，光用看的你可能都吃力。其实过程中没有用到什麼了不起的技巧，就是反复用基本、常见的处理极限手法，但实在太折腾了。

现在来介绍一种处理极限的老练手法：**等价无穷小代换**。然後让你看看，如何可以一行解决上面那题！

1.7.2 无穷小的分阶

从这些极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=x$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}=\frac{1}{2}$$

我们可以感受到：当 $x\to 0$ 时，$\sin(x), 1-\cos(x), \tan(x)-\sin(x)$ 虽然都会趋近 0，但是他们跑到 0 的速度是不一样快的！$\sin(x)$ 跑到 0 是跑得和 x 差不多快的，然而 $\tan(x)-\sin(x)$ 跑到 0 跑得和 x^3 差不多快！于是，我们将趋近于 0 的这种无穷小行为进行分阶。

定义 1.7.1

设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，

1. 若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0$，则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的高阶无穷小，或成 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小。
2. 若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=C\ (C\neq 0)$，则称 $g(x)$ 与 $f(x)$ 是同阶无穷小。
3. 若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=1$，则称 $g(x)$ 与 $f(x)$ 是等价无穷小，并记为 $g(x)\sim f(x)$。

初学者常见一种错误，对于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$，有时写成 $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)=x$。他心想：当 x 非常小的时候，$\sin(x)$ 和 x 差不多嘛！其实想法是对的，只是不能写成上面那样，一个函数取极限 $x\to 0$ 了怎么还能有 x？正确来讲，应该是写成现在所介绍的 $\sin(x)\sim x$ 。就是说，$\sin(x)$ 与 x 是等价无穷小，这样不但写法正确，也更贴近他原来想法。

这样，我们现在将熟知的几个极限改写成如下形式：

性质 1.7.1　常见的等价无穷小

$$\sin(x) \sim x \qquad \sin^{-1}(x) \sim x$$

$$\tan(x) \sim x \qquad \tan^{-1}(x) \sim x$$

$$1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$$

$$e^x - 1 \sim x \qquad \ln(1+x) \sim x$$

$$a^x - 1 \sim x\ln a \quad (a>0, a\neq 1) \qquad \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a} \quad (a>0, a\neq 1)$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax \quad (a \neq 0)$$

1.7.3 等价无穷小代换

上面列出常见的等价无穷小，就是为了求极限可以拿来代换，如下所示。

例题 1.7.1　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$。

解

因为 $\sin(ax) \sim ax$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

例题 1.7.2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\ln(1-x)}$。

解

因为 $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}, \ln(1+ax) \sim ax$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot(-x)} = -\frac{1}{2}$$

这两题用等价无穷小代换来做，与原来作法的区别，就是省略了原本的乘一大堆东西。本来 $\frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$ 是写成一个刻意凑出 $\frac{\sin(ax)}{ax}$ 的写法：$\frac{\sin(5x)}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\frac{5}{2}$，现在直接用等价无穷小代换 $\sin(ax) \sim ax$，省心多了！

例题 1.7.3 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{e^x-1}$。

解

$\sqrt{1+\sin(x)}-1\sim\sin(x)\sim x, e^x-1\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2}$$

例题 1.7.4 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)}{\ln(1+3x+x^4)}$。

解

$\ln(1+x+x^2)\sim x+x^2, \ln(1+3x+x^4)\sim 3x+x^4$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)}{\ln(1+3x+x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{3x+x^4}=\frac{1}{3}$$

现在来看看刚刚那个繁杂的题，用无穷小代换做起来如何。

例题 1.7.5 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-2x^4}}{x\big(1-\cos(x)\big)\tan\big(\sin(x)\big)}$。

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\big(\sqrt{1+x^4}-1\big)-\big(\sqrt[3]{1-2x^4}-1\big)}{x\big(1-\cos(x)\big)\tan\big(\sin(x)\big)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^4}{x\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\sin(x)}=\frac{7}{3}$$

上面这样写，可以算是对。但严格说起来，事情还没这么简单。以下这个极限是个典型例子：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}\cdot\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

如果改为一开始就使用等价无穷小代换，会发生错误

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

之所以会出问题，是因为当我们将 $\tan(x)$ 替换成 x，$\tan(x)$ 并非真等于 x，它应该是 x 加上比 x 高阶的无穷小，而我们在极限式中忽略更高阶的无穷小。然而在 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$ 中，替换掉 $\tan(x)$ 与 $\sin(x)$ 后，两个 x 正好减掉。此时更高阶无穷小的部分在此极限式中就变得重要，却被我们舍去，答案当然就会错了。

许多教材的说法，是说等价无穷小代换只能用在乘除型，不能用在加减型。但是我们刚刚也看到了，加减型代换后还是可能做出正确答案。其实，之所以说加减型不能使用，并不是说使用之后必然发生错误，而是它有使用条件。所以，目前我们有三种应对策略：

1. **设法化加减为乘除**

   比方说

   $$\lim_{x\to0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan(x)\big(1-\cos(x)\big)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$$

   以及

   $$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x^4}-1\right)-\left(\sqrt[3]{1-2x^4}-1\right)}{x\big(1-\cos(x)\big)\tan\big(\sin(x)\big)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x\big(1-\cos(x)\big)\tan\big(\sin(x)\big)}\cdot\left(1-\frac{\sqrt[3]{1-2x^4}-1}{\sqrt{1+x^4}-1}\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{x\cdot\frac{x^2}{2}\cdot x}\cdot\left(1-\frac{\frac{-2}{3}x^4}{\frac{1}{2}x^4}\right)=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

   不过这样其实只是绕过问题，并没有解决加减型如何使用等价无穷小代换的问题。而且在绕过问题的同时，也使得解题难度又上升回来。所以不见得是好办法，只能作为我们可使用的手段之一。

2. **遇到加减型一律不使用等价无穷小代换**

   依然没有解决问题，但至少保证不犯错，这就是许多教材采用的策略。这样其实也没有不好，我们现在学这个就是为了高效解题，如果还过度费神去探究一堆理论，也许反而增加自己学习障碍。特别是如果你本来就比较畏惧学习微积分，直接避开就是较省事的策略。

3. **理清加减型在什么条件下可使用等价无穷小代换**

   也有部分教材会给出加减型的可使用时机，但理论探讨起来稍复杂，操作起来也不见得容易。

下面介绍较简化的使用条件给你，虽因简化而导致仍不完备，但已经足够解决大一微积分会遇到的大多数极限问题。

首先简单来说，如果使用等价无穷小代换，会发生减光光变成 0 的情况，此时便不可使用在加减型上面。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3} \qquad \times$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x-3x}{x}=5-3=2 \qquad \bigcirc$$

例题 1.7.6 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos(2x)}{\ln(1+x)}$。

解

因为 $\sqrt{1+x^2}-1\sim\frac{1}{2}x^2, 1-\cos(2x)\sim 2x^2, \ln(1+x)\sim x$，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos(2x)}{\ln(1+x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)-\left(\cos(2x)-1\right)}{\ln(1+x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2-2x^2}{x}=0\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}x^2-2x^2$ 并未减光成 0，所以结果正确。

例题 1.7.7 求极限 $\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}\right)$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}\right) &= \lim_{y\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{y^3}+\frac{1}{y}}-\sqrt[3]{\frac{1}{y^3}-\frac{1}{y}}}{y}\\ \boxed{\text{上下同乘以 } y}\quad &= \lim_{y\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{1+y^2}-\sqrt[3]{1-y^2}}{y^2}\\ &= \lim_{y\to 0^+}\frac{\left(\sqrt[3]{1+y^2}-1\right)-\left(\sqrt[3]{1-y^2}-1\right)}{y^2}\end{aligned}$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}y^2 - (-\frac{1}{3}y^2)}{y^2} = \frac{2}{3}$$

但是这个简单讲法并不完全正确，例如

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \ln(x+1) + e^x - 1}{x^2 + \sin^2(3x)} = \frac{1}{5}$$

但使用等价无穷小代换得到

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \ln(x+1) + e^x - 1}{x^2 + \sin^2(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x + x}{x^2 + (3x)^2} = \frac{1}{10}$$

因为在分子中的 $-\ln(x+1) + e^x - 1$ 部分，依然发生了类似问题：我们换成 $-x+x$ 时，忽略了更高阶无穷小，但 x 的部分减光了，更高阶的部分变得重要。于是修改说法如下：

性质 1.7.2　加减型等价无穷小代换使用条件

若使用等价无穷小代换后，最低阶的无穷小项并未消光，则可以使用；若最低价的无穷小项消光，则答案可能对也可能错。

这样的说法，理论上还是有无法判定是否能用的时机，但实际上在大一微积分是比较难遇到了。