試閱本

11.7 梯度、方向導數與切平面

■ 11.7 梯度、方向導數與切平面

11.7.1 梯度的定義

對於兩變數函數 $f(x,y)$，其梯度 $\nabla f(x,y)$ 定義為

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

若是變數有三個，則 $\nabla f(x,y,z)$ 定義為

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

一般而言，一個有 n 個變數的函數 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，取梯度以後便得到一個 n 維的向量函數。而其第一個分量就是對第一個變數作偏微導；第二個分量就是對第二個變數作偏微導，以此類推。也就是說

$$\nabla f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

例題 11.7.1 $f(x,y)=x^2y+\sin(xy)$，求其在點 $(2,3)$ 處的梯度。

解

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(2xy+y\cos(xy)\,,\,x^2+x\cos(xy)\right)$$

所以

$$\nabla f(2,3)=(12+3\cos(6)\,,\,4+2\cos(6))$$

這樣的定義不算難懂，但我們目前也只知道它在數學式上是如何定義，並不明白這樣的向量有何幾何意義，這將在後面討論。

11.7.2 方向導數

如果你去爬山，正在山坡上的某處時。此時我問你，你那邊的斜率大概多少？你一定感到無法回答，要

再反問我:「你是指朝哪個方向看?」通常在山坡上,朝著四面八方各種方向看過去,看起來的斜率應該會不盡相同。

單變數的導數,便是在求斜率。多變函數時,也可以做類似事情。但如前所述,由於定義域已不只一維,因此在同一個點上,可能朝各個方向的斜率都不盡相同。

這種問題,便是**方向導數**(directional derivative),且讓我們先定睛於兩變數的情況。設函數 $z = f(x,y)$,而在定義域 xy-平面上有一點 (a,b) 及單位向量 $\overrightarrow{u}$ 。我們想問,曲面 $z = f(x,y)$ 在 (a,b) 處,沿 $\overrightarrow{u}$ 的方向的斜率會是多少。符號上,是記為 $D_{\overrightarrow{u}} f(a,b)$ 。裡面的 a,b 標示出是在何處;下標的單位向量則標示是往哪個方向。

既然 $\overrightarrow{u}$ 是單位向量,就可以寫成 $\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$ 。接著定義一個新函數

$$F(t) = f(a + t\cos(\theta), b + t\sin(\theta))$$

意思是從點 (a,b) 出發,沿 $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ 方向,走 t 單位長之後的函數值。而當然,$F(0) = f(a+0, b+0) = f(a,b)$ 。

這樣子定義了以後,只要將 $F(t)$ 對 t 求導後再代 $t = 0$ [1],便會是 f 於 (a,b) 處沿 $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ 方向的方向導數。也就是說

$$D_{\overrightarrow{u}} f(a,b) = F'(0)$$

而要把 $F'(0)$ 作出來,只須使用連鎖規則

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\overbrace{a + t\cos(\theta)}^{x}, \overbrace{b + t\sin(\theta)}^{y})\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} f(a,b) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial}{\partial y} f(a,b) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} f(a,b) \cos(\theta) + \frac{\partial}{\partial y} f(a,b) \sin(\theta)
\end{aligned}$$

[1] 因為 $(x,y) = (a,b)$ 處是 $t = 0$ 時。

兩兩相乘再加起來，可視為向量內積

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)\,,\,\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)\right)\cdot(\cos(\theta)\,,\sin(\theta))$$

注意左邊那個向量，正是我們剛學到的梯度！因此可寫成

$$\nabla f(a,b)\cdot(\cos(\theta)\,,\sin(\theta))$$

所以，計算方向導數，便是取該點的梯度，再與單位向量 $\overrightarrow{u}$ 作內積。

性質 11.7.1

$f(x,y)$ 於點 (a,b) 處，沿著單位向量 $\overrightarrow{u}$ 的方向，的方向導數為

$$D_{\overrightarrow{u}}f(a,b)=\nabla f(a,b)\cdot\overrightarrow{u}$$

例題 11.7.2 $f(x,y)=x^2+y^2$， $\overrightarrow{v}=(1,1)$ 。計算方向導數 $D_{\overrightarrow{v}}f(-3,2)$ 。

解

$$\nabla f(-3,2)=\left(\frac{\partial}{\partial x}f(-3,2)\,,\,\frac{\partial}{\partial y}f(-3,2)\right)$$

$$=\left(2x\Big|_{(-3,2)}\,,\,2y\Big|_{(-3,2)}\right)=(-6,4)$$

注意 $\overrightarrow{v}$ 並非單位向量，要將它單位化。由於它的長度是 $\sqrt{2}$，所以除以 $\sqrt{2}$，得到 $\overrightarrow{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ 。所以

$$D_{\overrightarrow{v}}f(-3,2)=(-6,4)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

現在來想一個問題。不是先給你方向再問你方向導數，而是問說，在 $f(a,b)$ 處，朝哪個方向看起來，會有最大的方向導數。

由於方向導數可用梯度與單位向量作內積

$$D_{\overrightarrow{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \overrightarrow{u}$$

而向量內積又可寫成

$$\left|\nabla f(a,b)\right| \cdot \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \cos(\phi)$$

其中 ϕ 是兩向量 $\nabla f(a,b)$ 與 $\overrightarrow{u}$ 之夾角。

我們注意，由於 $\nabla f(a,b)$ 是取完梯度以後，又已代入點 (a,b) 了。所以它已是一個固定向量，也因此其長度 $\left|\nabla f(a,b)\right|$ 為一定值，姑且記之為 C 。而至於 $\overrightarrow{u}$，它是單位向量，長度根本是 1 。也就是說，現在整個式子的變數根本就只有 ϕ:

$$C \cdot 1 \cdot \cos(\phi)$$

問哪個方向會有最大的方向導數，等同於，問怎樣的 ϕ 會使上式極大。那當然便是 $\cos(\phi) = 1$ 時，也就是 $\phi = 0$ 時，會使方向導數最大。而所謂的 $\phi = 0$ 時，即是梯度 $\nabla f(a,b)$ 與單位向量 $\overrightarrow{u}$ 同向之時。

所以，剛剛那問題，在 $f(a,b)$ 處，朝哪個方向看起來，會有最大的方向導數。答案便是與梯度 $\nabla f(a,b)$ 同向的那個方向。

我再把這句話反過來講。梯度 $\nabla f(a,b)$ 這個向量，它是朝哪個方向呢？它是朝著，會使得函數 $f(x,y)$ 在 (a,b) 處，有最大方向導數的那個方向。

而這最大方向導數的值又是如何呢?由於取 $\cos(\phi) = 1$ 了，所以

$$C \cdot 1 \cdot \cos(\phi) = C \cdot 1 \cdot 1 = C$$

C 是剛剛用來記 $\left|\nabla f(a,b)\right|$ 的。所以，最大方向導數的值，就是梯度 $\nabla f(a,b)$ 的長度。綜合以上討論，我們便可歸納出梯度 $\nabla f(a,b)$ 的幾何意義。

性質 11.7.2 梯度向量的幾何意義

函數 $z=f(x,y)$，其在點 (a,b) 處的梯度 $\nabla f(a,b)$ 是一個向量，其幾何意義為：

1. 就方向而言，它朝著使得函數 $f(x,y)$ 在 (a,b) 處有最大方向導數的方向
2. 就長度而言，其長度為那個最大方向導數的值

例題 11.7.3 熱鍋上的螞蟻急著想盡快往較低溫處跑。鍋子位於 $x^2+y^2\leq 1$，牠此時正在原點 $(0,0)$，而鍋子的溫度函數是 $170\cos(y+xy)+9(x^2+x+2y)$。此時牠應朝哪個方向移動？

解

為了不被煮熟趕快逃跑，這隻熱鍋上的螞蟻急得像熱鍋上的螞蟻。在此危急關頭，正所謂「急中生智」，牠在一瞬之間領悟了微積分，知道此時要算最小方向導數。最大方向導數是取 $\cos(\phi)=1$，而最小就是取 $\cos(\phi)=-1$。也就是說，跟梯度向量的方向反向。於是先求出梯度

$$\nabla f(0,0)$$

$$=\left(170y\sin(y+xy)+9(2x+1)\Big|_{(0,0)},\right.$$

$$\left.170(1+x)\sin(y+xy)+9(2)\Big|_{(0,0)}\right)=(9,18)$$

因此牠要往 $(-1,-2)$ 的方向移動，才會降溫最快。不過即使往降溫最快的方向跑，溫度仍然很高，所以牠還是被煮熟了。

例題 11.7.4 有一座山的坡面為曲面 $100(x^2+y^2-2x-3y+2xy)$。此時你在 $(x,y)=(1,2)$ 處，請問你那邊看起來坡度最大是多少斜率？

解

先求出梯度

$$\begin{aligned}&\nabla f(1,2)\\&=\left(100(2x-2+2y)\big|_{(1,2)},100(2y-3+2x)\big|_{(1,2)}\right)\\&=(400,300)\end{aligned}$$

梯度向量的長度，便是最大方向導數的值：

$\sqrt{400^2+300^2}=500$

例題 11.7.5 若 $f(x,y,z)$ 點 P 沿著 $\overrightarrow{u}=(1,1,-1)$ 方向有最大方向導數 $2\sqrt{3}$。

(1) 求 f 在 P 點的梯度 $\nabla f(P)$。

(2) 求 f 在 P 點沿著 $\overrightarrow{v}=(1,1,0)$ 方向的方向導數。

解

(1) 由題意 f 在 P 點的梯度 $\nabla f(P)$ 與 $\overrightarrow{u}=(1,1,-1)$ 同向，可設為 $\nabla f(P)=t(1,1,-1)$。又 $\nabla f(P)$ 的長度與最大方向導數的值 $2\sqrt{3}$ 相同，而 $(1,1,-1)$ 的長度是 $\sqrt{3}$，故 $t=2$，$\nabla f(P)=(2,2,-2)$。

(2) 先將 $(1,1,0)$ 單位化得到 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，則 $D_{\overrightarrow{v}}(P)=(2,2,-2)\cdot(1,1,0)=2\sqrt{2}$。

其實，梯度的幾何意義還沒有討論完。如果我們遇到的是隱函數 $g(x,y,z)=C$。雖然也是三維空間中的曲面，但如果此時取梯度，得到 $\nabla g(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$。此情況所取的梯度，幾何意

義就會不一樣了。

我們先對於隱函數 $g(x,y,z)=C$，等號兩邊作微分 (differenial)

$$\mathrm{d}g=\mathrm{d}C$$

因 C 是常數所以 $\mathrm{d}C=0$；而 $\mathrm{d}g$ 則用全微分寫，得到

$$g_x\,\mathrm{d}x+g_y\,\mathrm{d}y+g_z\,\mathrm{d}z=0$$

兩兩相乘再加起來，可視之為兩向量作內積。因此寫成

$$(g_x,g_y,g_z)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)=0$$

又可寫成

$$\nabla g(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{X}=0$$

其中 $\mathrm{d}\overrightarrow{X}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$。我簡寫成此符號，是為要強調，它是代表沿著曲面 $g(x,y,z)=C$ 上作的一個微小變動。它可以是各種方向，只要是沿著曲面上的。現在我們分析的結果是，這個沿著曲面上任意方向的微小變動 $\mathrm{d}\overrightarrow{X}$，它跟梯度向量 $\nabla g(x,y,z)$ 內積為 0，也就是垂直。梯度向量跟沿著曲面不管怎麼拉的向量都垂直，所以這個梯度向量即是**法向量**。

性質 11.7.3　梯度的幾何意義

一個三維中的曲面，若將其表達成顯函數形式 $z=f(x,y)$，其在點 (a,b) 處的梯度 $\nabla f(a,b)$，是一個向量。此向量的幾何意義為：

1. 方向：它朝著使得函數 $f(x,y)$ 在 (a,b) 處有最大方向導數的方向
2. 長度：其長度為那個最大方向導數的值

若將其表達成隱函數形式 $g(x,y,z)=C$，其在點 (a,b,c) 處的梯度 $\nabla g(a,b,c)$，是曲面在 (a,b,c) 處的法向量。

已知隱函數，要將其寫成顯函數形式，可能會很困難。然而已知顯函數的情況下，要寫成隱函數就非常簡

單。譬如說 $z=x^2+2y+7$，只要簡單地將 z 移過去，得到 $x^2+2y+7-z=0$，這樣就有隱函數形式了。

另外，雖然前面是以三維中的曲面為例，但二維中的曲線也是同樣道理的。譬如說 $y=3x+4$ 是一條直線。若將 y 移項得到 $3x-y+4=0$，此時作梯度得到 $(3,-1)$，這便是直線的法向量。而如果是圓 $x^2+y^2=4$，作梯度得到 $(2x,2y)$，接著再代點之後，就會得到該點的梯度，也就是該處的法向量。

如果說對於曲面 $z=f(x,y)$，為了繪製等高線圖，設了 $z=c_1,c_2,\cdots,c_n$，而得到 $f(x,y)=c_1, f(x,y)=c_2,\cdots,f(x,y)=c_n$。這些都是二維平面曲線的隱函數形式。

我的意思是說，看清楚了，同樣是 $\nabla f(a,b)$。對於曲面來說，$\nabla f(a,b)$ 是在它的顯函數形式之下取梯度後，代 $(x,y)=(a,b)$；對曲線來說，$\nabla f(a,b)$ 是在它的隱函數形式之下取梯度後，代 $(x,y)=(a,b)$。

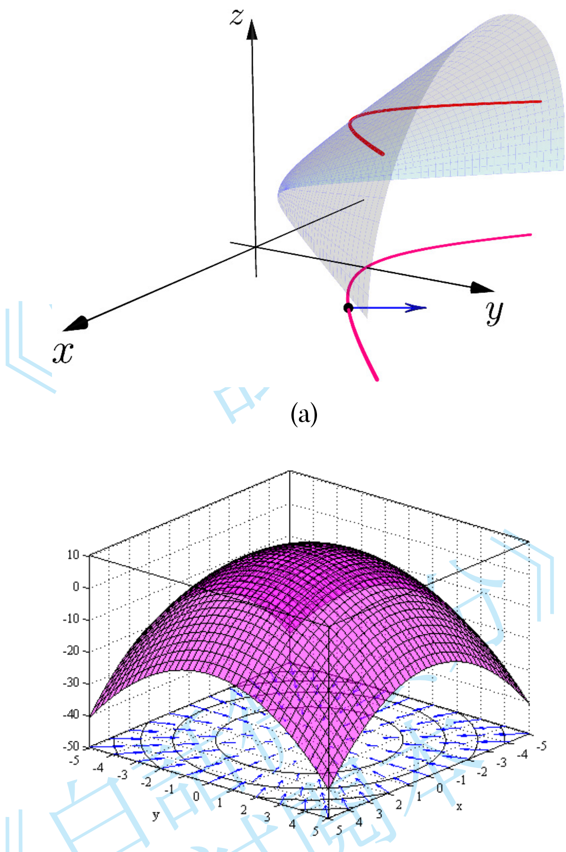
所以說，同一個向量 $\nabla f(a,b)$，它是在曲面 $z=f(x,y)$ 上的 $(x,y)=(a,b)$ 處，指著最大方向導數的方向，且其長度就是最大方向導數的值；而它同時也是在某一條等高線 $f(x,y)=c_k$ 上的 $(x,y)=(a,b)$ 處的法向量。

如圖 11.2(a) 所示，畫出曲面 $z=f(x,y)$ 及它的某一條等高線 $f(x,y)=c$。對曲面的顯函數 $z=f(x,y)$ 或是對等高線的隱函數 $f(x,y)=c$ 在 $(x,y)=(1,3)$ 處取梯度，取出來是同樣的向量 $\nabla f(1,3)$。這條向量，正是那條等高線 $f(x,y)=c$ 在 $(x,y)=(1,3)$ 處的法向量。同時，曲面在 $(x,y,z)=(1,3,f(1,3))$ 處，朝著向量 $\nabla f(1,3)$ 方向，即是最大方向導數的方向，並且向量的長度就是最大方向導數的值。

例題 11.7.6 求曲線 $x^3+y^3-\frac{9}{2}xy=0$ 於 $(2,3)$ 處的切線方程式。

解

原本在單變數微分學中的隱函數求導，現在也



(a)

(b)

圖 11.1: 梯度幾何意義

可以將其取梯度

$$\nabla\left(x^3+y^3-\frac{9}{2}xy\right)=\left(3x^2-\frac{9y}{2},3y^2-\frac{9x}{2}\right)$$

接著代點 (2,3)，得到

$$\left(12-\frac{27}{2},27-9\right)=\left(-\frac{3}{2},18\right)$$

這是曲線 (2,3) 處的法向量，同時也是以 (2,3) 為切點的切線之法向量 [a]。因此切線方程式便為

$$-\frac{3}{2}(x-2)+18(y-3)=0$$

[a]相切即有共同的法向量。

11.7.3 切平面

前面示範了以梯度來求出切線方程式。而如果是給定一個曲面，想要求切平面方程式的話，也可以用梯度來做。

例題 11.7.7 曲面 $x^2+4y^2=z^2$，求以 $(3,2,5)$ 為切點的切平面方程式。

解

先移項得到

$$x^2+4y^2-z^2=0$$

此情況取梯度

$$\nabla(x^2+4y^2-z^2)=(2x,8y,-2z)$$

接著再代點 $(3,2,5)$ 可得法向量 $(6,16,-10)$ 。於是切平面方程式即為

$$3(x-3)+8(y-2)-5(z-5)=0$$

例題 11.7.8 曲面 $z=\ln(x^2+y^2)$，求以 $(1,0,0)$ 為切點的切面方程式。

解

先移項

$$\ln(x^2+y^2)-z=0$$

取梯度

$$\left(\frac{2x}{x^2+y^2},\frac{2y}{x^2+y^2},-1\right)$$

代入點 $(1,0,0)$

$$(2,0,-1)$$

於是可知切平面方程式為

$$2(x-1)-z=0$$