1 全微分

1.1 通俗不嚴謹的討論

在單變函數中，有微分 (differential) 。它是在研究兩個無窮小增量 $\mathrm{d}y$ 與 $\mathrm{d}x$ 之間的關係。而在多變函數 $z = f(x, y)$ 也可以做類似的事情，研究無窮小增量 $\mathrm{d}z$ 與另兩個無窮小增量 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 之間的關係。此時，我們稱之為**全微分** (total differential) 。

單變數時，微分（differential）的寫法是

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$\mathrm{d}y$ 是 $\mathrm{d}x$ 乘上某個東西，而那東西就是將 y 對 x 求導 (differentiate) 。

至於多變數的情況也類似，$\mathrm{d}z$ 是在 $\mathrm{d}x$ 與 $\mathrm{d}y$ 前面分別乘上某東西，然後再加起來。在 $\mathrm{d}x$ 前面所乘的，就是 z 對 x 作偏微導；在 $\mathrm{d}y$ 前面所乘的，就是 z 對 y 作偏微導。

於是便有

$$\mathrm{d}z = f_x(x, y)\,\mathrm{d}x + f_y(x, y)\,\mathrm{d}y$$

用另一個符號寫的話便是

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

例題 1.1 $z = f(x, y) = x^3 - xy + y^2$，求全微分 $\mathrm{d}z$。

解

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \\ &= (3x^2 - y)\,\mathrm{d}x + (-x + 2y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

differential 的應用是線性逼近，total differential 的應用也是線性逼近。不同在於，differential 是用切線代替曲線，total differential 則變成是用切平面代替曲面。

如果變數更多，不只兩變數的話，全微分也都類似寫法：對於 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n$$

例題 1.2 估計 $\sqrt{(5.02)^2 + (11.99)^2}$。

解

顯見他很接近 $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$。因此我們設 $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$，$\Delta x = 0.02, \Delta y = -0.01$，並計算

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

代入 $(x, y) = (5, 12)$ 得到

$$f_x(5, 12) = \frac{5}{13}, f_y(5, 12) = \frac{12}{13}$$

於是利用全微分，可估計

$$\begin{aligned} dz &= f_x(5,12)dx + f_y(5,12)\,dy \\ &\doteqdot f_x(5,12)\Delta x + f_y(5,12)\Delta y \\ &= \frac{5}{13}(0.02) + \frac{12}{13}(-0.01) = -\frac{2}{1300} \end{aligned}$$

所以

$$\sqrt{(5.02)^2 + (11.99)^2} \doteqdot 13 - \frac{2}{1300}$$

例題 1.3 一張桌布長 60 公分，寬 45 公分。在製作時可能會有 ±0.02 公分的誤差，請問製作出來的桌布最大與最小面積約為多少？

解

這題若直接乘

$$60.02 \times 45.02, 59.98 \times 44.98$$

也不算難做。而如果我們用全微分來估計的話，設 $z = xy$，則偏導數 $z_x = y$，$z_y = x$。因此最大面積時

$$dz \doteqdot 45 \times 0.02 + 60 \times 0.02 = 2.1$$

面積大約是 $60 \times 45 + 2.1$。而最小面積時

$$dz \doteqdot 45 \times (-0.02) + 60 \times (-0.02) = -2.1$$

面積大約是 $60 \times 45 - 2.1$。

例題 1.4 請估計 $\tan(44^\circ)\cos(62^\circ)$。

解

它很接近 $\tan(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{3})$。設 $z = f(x,y) = \tan(x)\cos(y)$，$f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$。則偏導數

$$z_x = \sec^2(x)\cos(y)\,,\ z_y = -\tan(x)\sin(y)$$

用全微分估計

$$\begin{aligned} dz &\doteqdot \sec^2(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{3})\left(-\frac{\pi}{180}\right) - \tan(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{3})\left(\frac{2\pi}{180}\right) \\ &= 2\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right) - 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2\pi}{180}\right) = -\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\pi}{180} \end{aligned}$$

於是

$$\tan(44^\circ)\cos(62^\circ) \doteqdot \frac{1}{2} - \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\pi}{180}$$

例題 1.5 請估計 $0.98^{3.03}$。

解

它很接近 1^3。設 $z=f(x,y)=x^y$, $f(1,3)=1$。則偏導數

$$z_x=yx^{y-1},\, z_y=x^y\ln(x)$$

用全微分估計

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &\doteqdot \left(3\cdot 1^2\right)\cdot(-0.02)+1^3\cdot\ln(1)\cdot(0.03)\\ &=-0.06+0\end{aligned}$$

於是

$$0.98^{3.03}\doteqdot 1-0.06=0.94$$

1.2 理論探討

由定義看來，偏導數

$$f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \tag{1.1}$$

就像是單變數導數的類推，定義方式看起來是差不多的。但是由於可偏導不見得連續，所以偏導數並不是單變數微分的完美類推。

所以，現在要討論出另一種定義方式，使其在單變數時相容於原本的可微定義，並且在多變數中能夠保有單變數微分的一些性質，比方說多變數的可微保證連續。

由線性逼近的觀點，所謂的可微，就是可以用切線來局部近似曲線。在多變數中，所謂的可微，就是可以用切面來局部近似曲面。所以，我們提出以下定義：

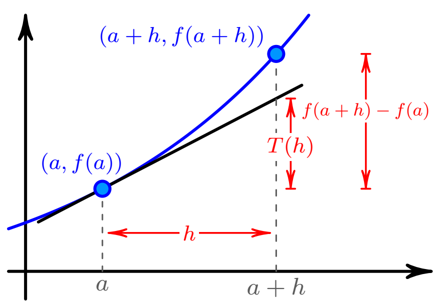
定義 1.1 單變數函數的可微定義

若存在一個線性函數 $T(x)=mx$ 使得：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-T(h)}{h}=0$$

則稱 f 在 $x=a$ 處可微，並且 $f'(a)=m$。

這樣定是什麼意思呢？我們來看一下右圖。將 $f(a+h)-f(a)$ 再扣掉 $T(h)$，這便是線性逼近的誤差。此誤差必須非常小，有多小呢？當 $h\to 0$ 時，與 h 相除還是趨近到 0。換句話說，這誤差跑到 0 比 h 還快！



現在將一樣的講法套用在兩變數函數的情況。

定義 1.2 兩單變數函數的可微定義

若存在一個線性函數 $T(x)=mx+ny$ 使得：

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-T(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

則稱 f 在 $(x,y)=(a,b)$ 處可微。

注意 $(a+h,b+k)$ 就是點 (a,b) 加上向量 (h,k)，$\sqrt{h^2+k^2}$ 就是向量 (h,k) 的長度，所以這兩個定義的寫法是極為相近的。

也可以利用小 o 符號寫成另一種描述方式：

定義 1.3　單變數函數的可微定義

若存在一個線性函數 $T(x)=mx$ 使得：

$$f(a+h)=f(a)+T(h)+o(h)$$

則稱 f 在 $x=a$ 處可微，並且 $f'(a)=m$。

定義 1.4　兩變數函數的可微定義

若存在一個線性函數 $T(x,y)=mx+ny$ 使得：

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+T(h,k)+o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

則稱 f 在 $(x,y)=(a,b)$ 處可微，。

定理 1.1　兩變數函數可微必然連續

若兩變數函數 $f(x,y)$ 在 $(x,y)=(a,b)$ 處可微，則 f 在 $(x,y)=(a,b)$ 處連續。

證

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k)\\
=&\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a,b)+T(h,k)+o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)\\
=&\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a,b)+mh+nk=f(a,b)
\end{aligned}$$

極限值等於函數值，故連續。 ■