

五南出版

微積分
初學者的福音

白話微積分



作者：卓永鴻

本書特色

- ★ 內容深入淺出，適合自學
- ★ 例題解答步驟詳細
- ★ 指出學習盲點

試閱本

8.7 冪級數



■ 8.7 冪級數

在前面幾個主題，討論的皆是數項級數 $\sum a_n$ 的斂散性。所謂的數項級數，其每一項 a_n 都是數。另外有種比較不一樣的類型，叫做**函數項級數**。函數項級數 $\sum f_n(x)$ 的每一項 $f_n(x)$ 都是函數。以下稍舉數例：

數項級數	函數項級數
$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots$	$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \cdots$
$\frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \cdots$	$\frac{x}{1-x^2} + \frac{2x}{1-2^3x^2} + \frac{3x}{1-3^3x^2} + \cdots$

原本函數項級數的每一項 $f_n(x)$ 都是函數，然而如果代了一些值進去，比方說 $x = 3$ ，於是每一項 $f_n(3)$ 又是數了，代完就是個數項級數 $\sum f_n(3)$ 。例如函數項級數 $\sum \frac{x^n}{n!}$ ，代 $x = 3$ 之後變成數項級數 $\sum \frac{3^n}{n!}$ 。有些數項級數會收斂，有些會發散。因此函數項級數可能在 x 代了某些值之後收斂，代了某些值發散。

不過，一般的函數項級數討論起來困難多了，通常是留到高等微積分去正式談。大一微積分通常只處理較簡單而且用處廣的情況：其一般項 $f_n(x)$ 為冪函數 $a_n x^n$ ，這樣的級數便是冪級數 $\sum a_n x^n$ ，也就是「無窮的多項式」。在高中多項式的主題，我們學過

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

可以平移成

$$a'(x-2)^3 + b'(x-2)^2 + c'(x-2) + d'$$

因此冪級數也同樣可以作平移，正式介紹如下：

性質 8.7.1 冪級數

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

稱為以 $x = 0$ 為中心的冪級數。而形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

稱為以 $x = c$ 為中心的冪級數。

有關冪級數的收斂發散，先舉個最簡單的例子：

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

這其實就是無窮等比級數，首項是 1、公比是 x 。便容易知道，代 $x = 0.6$ 會收斂，代 $x = -3$ 會發散。較一般地來說，凡是 $-1 < x < 1$ ，代了皆收斂，其餘的值代了皆發散。這種情況我們就這樣講：冪級數 $\sum x^n$ 的**收斂區間** (interval of convergence) 為 $(-1, 1)$ 。我們可以注意到：冪級數 $\sum x^n$ 以 $x = 0$ 為中心，而其收斂區間 $(-1, 1)$ 亦是以 $x = 0$ 為中心。這並不是巧合，事實上，一個冪級數 $\sum a_n(x-c)^n$ 的收斂區間必然是以 $x = c$ 為中心的。既然如此，我們便將收斂區間長度的一半稱為**收斂半徑** (radius of convergence)。這就好比圓的半徑是直徑的一半，圓心到圓周的距離就是半徑的大小。

性質 8.7.2 冪級數收斂區間的可能性

冪級數 $\sum a_n(x-c)^n$ 的收斂區間只有以下三種可能：

1. 級數只在 $x = c$ 時收斂，其餘皆發散
2. 級數的收斂區間為整個實數 $\mathbb{R}$ ，即 x 代任意實數值後級數皆收斂
3. 級數的收斂區間為 $[c-R, c+R]$ 、 $(c-R, c+R)$ 、 $(c-R, c+R]$ 或 $[c-R, c+R)$ ，其中 R 為收斂半徑

冪級數 $\sum a_n(x-c)^n$ 之所以必然在一個以 $x = c$ 為中心的區間收斂，第一， $x = c$ 代進去後各項皆 0，當然

收斂。第二，假設有某個 $k_1 \neq c$ ，使得冪級數代 k_1 後收斂，那麼對於任意 $k_2 \neq c$ 滿足 $|k_2 - c| < |k_1 - c|$ ，白話點講，就是 k_2 比 k_1 還要靠近 c ，那麼代 $x = k_2$ 後必也收斂。粗略地解釋，既然 $|k_2 - c| < |k_1 - c|$ ，那麼 $|k_2 - c|^n$ 也比 $|k_1 - c|^n$ 還小，於是 $\sum a_n(k_2 - c)^n$ 會比 $\sum a_n(k_1 - c)^n$ 收斂得快。如此，便知道收斂的範圍必為以 $x = c$ 為中心的區間。

討論至此，求冪級數收斂區間的策略就比較簡單了。其步驟為：先試圖求收斂半徑 R ，若 $R = 0$ ，則為第一個情況，只在 $x = c$ 收斂；若 $R = \infty$ ，則為第二個情況，在整個實數 $\mathbf{R}$ 皆收斂；若 R 為一個非零定值，則為第三個情況，此時須再進一步確認端點的收斂情形，就是直接將 x 代端點的值進去看是否收斂。

現在我們只差求收斂半徑 R 的方法，就可以完善求解收斂區間的步驟了！為以下討論的方便，設 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 。設冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ，使用比值審斂得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x-c| = \rho \lim_{n \rightarrow \infty} |x-c| \quad (8.1)$$

如果 $\rho = \infty$ ，那麼除非 $x = c$ ，否則(8.1)極限為 ∞ ，級數發散。也就是說，此時為第一種情況，只在 $x = c$ 收斂；如果 $\rho = 0$ ，那麼無論 x 為何值，(8.1)極限為 $0 < 1$ ，級數收斂。也就是說，此時為第二種情況，收斂區間為整個實數 $\mathbf{R}$ ；如果 ρ 是個非零的數，那麼若 $|x-c| < \frac{1}{\rho}$ ，就有(8.1)極限小於 1，級數收斂。什麼叫做若 $|x-c| < \frac{1}{\rho}$ 級數就收斂？意思是級數至少在 $(c - \frac{1}{\rho}, c + \frac{1}{\rho})$ 收斂。至於 $(-\infty, c - \frac{1}{\rho}) \cup (c + \frac{1}{\rho}, \infty)$ ，則會使(8.1)極限大於 1，發散。也就是說，此時為第三種情況，收斂半徑 $R = \frac{1}{\rho}$ 。但是，此時尚不確定在區間的端點，也就是 $x = c \pm R$ 處是否收斂，因為會使(8.1)極限等於 1，以比較審斂來說是無結

論的，須另外判斷。總結以上討論，若我們接受 $\frac{1}{\infty} = 0$ 、 $\frac{1}{0} = \infty$ 這樣的記號，便可簡單對收斂區間下結論：

性質 8.7.3 計算收斂半徑

記 $\frac{1}{\infty} = 0$ 、 $\frac{1}{0} = \infty$ 、 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 。則 $\sum a_n(x-c)^n$ 收斂半徑 $R = \frac{1}{\rho}$ 。

例題 8.7.1

求 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收斂區間。

解

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$$

故收斂半徑 $R = 1$ ，收斂區間至少為 $(-1, 1)$ 。為判斷端點，代 $x = 1$ 得 $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ 明顯是無限大型發散；代 $x = -1$ 得 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ 為振盪型發散。故收斂區間為 $(-1, 1)$ 。

例題 8.7.2

求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收斂區間。

解

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

故收斂半徑為無窮大，收斂區間為 $(-\infty, \infty)$ 。

例題 8.7.3

求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$ 的收斂區間。

解

首先整理 $\frac{(3x-2)^n}{n} = \frac{3^n(x-\frac{2}{3})^n}{n}$ ，所以

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+1} = 3$$

故收斂半徑 $R = \frac{1}{3}$ ，收斂區間至少 $(\frac{1}{3}, 1)$ 。為判斷端點，代 $x=1$ 得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ 發散；代 $x = \frac{1}{3}$ 得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 交錯級數收斂。故收斂區間為 $[\frac{1}{3}, 1)$ 。

例題 8.7.4

求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2} (-2x)^n$ 的收斂區間。

解

首先整理 $\frac{n}{n+2} (-2x)^n = \frac{n}{n+2} (-1)^n \cdot 2^n \cdot x^n$ ，所以

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{n+3} \cdot 2^{n+1}}{\frac{n}{n+2} \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)(n+2)}{n(n+3)} = 2$$

故收斂半徑 $R = \frac{1}{2}$ ，收斂區間至少為 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。為判斷端點，代 $x = \frac{1}{2}$ 得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2} (-1)^n$ 、代 $x = -\frac{1}{2}$ 得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2}$ ，這兩個級數的一般項都不趨近到 0，故皆發散。所以收斂區間為 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。

例題 8.7.5

求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x-5)^n$ 的收斂半徑。

解

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{(n+1)^n}}{\frac{n!}{n^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

故收斂半徑 $R = e$ 。

例題 8.7.6

求 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} x^n$ 的收斂半徑。

解

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2+2n+1}}{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)^{n^2} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{2n} \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+2n} \right)^{n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{2n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+2n} \right)^{n^2+2n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2+2n} \right)^{-2n} \cdot e^{-2} \cdot 1 \\ &= e \cdot 1 \cdot e^{-2} \cdot 1 = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

故收斂半徑 $R = e$ 。

在上一題中，計算 ρ 時極限處理起來有些麻煩。其實，前面介紹 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ ，那是由比值審斂來的。我們也可以改用根植審斂，寫成 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ，這樣在計算上就變成

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e}$$

這樣的計算就簡便多了。

例題 8.7.7

求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ 的收斂區間。

解

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3 + \frac{(-2)^{n+1}}{3^n}}{1 + \frac{(-2)^n}{3^n}} = 1 \cdot \frac{3+0}{1+0} =$$

故 $R = \frac{1}{3}$ ，收斂區間至少 $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ 。為判斷端點，代 $x = -\frac{4}{3}$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$$

前項為交錯級數收斂，後項則注意 $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 為收斂的等比級數，而 $0 < \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n} < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ，故由比較審斂知收斂。因此代 $x = -\frac{4}{3}$ 後為兩個收斂級數的和，結果收斂。代 $x = -\frac{2}{3}$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$$

前項為調和級數發散，後項收斂，因此代 $x = -\frac{2}{3}$ 後為發散級數與收斂級數的和，結果發散。故收斂區間為 $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ 。