# 淺說向量微積分

卓永鴻

https://CalcGospel.top

September 25, 2023

# 線積分

# 物理的求質量問題

- 密度 × 大小 = 質量

# 物理的求質量問題

- 密度 × 大小 = 質量
- 所謂大小：一維為長度、二維為面積、三維大小為體積

# 物理的求質量問題

- 密度 × 大小 = 質量
- 所謂大小：一維為長度、二維為面積、三維大小為體積
- 若是不均勻密度，可使用積分，以密度函數作為被積分函數

# 物理的求質量問題

- 密度 $\times$ 大小 $=$ 質量
- 所謂大小：一維為長度、二維為面積、三維大小為體積
- 若是不均勻密度，可使用積分，以密度函數作為被積分函數
- 例：一維鐵絲 $a \le x \le b$ 之密度函數 $\rho(x)$，其質量 $\displaystyle\int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x$
- 例：二維盤子 $D$ 之密度函數 $\rho(x,y)$，其質量 $\displaystyle\int_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}A$
- 例：三維物體 $R$ 之密度函數 $\rho(x,y,z)$，其質量 $\displaystyle\int_R \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V$

# 空間中曲線求質量

- 如果 $C_1$ 是平面上一條彎曲鐵絲，其密度函數 $\rho(x, y)$，如何求質量?

# 空間中曲線求質量

- 如果 $C_1$ 是平面上一條彎曲鐵絲，其密度函數 $\rho(x,y)$，如何求質量?
- 如果 $C_2$ 是空間中一條彎曲鐵絲，其密度函數 $\rho(x,y,z)$，如何求質量?

# 空間中曲線求質量

- 如果 $C_1$ 是平面上一條彎曲鐵絲，其密度函數 $\rho(x,y)$，如何求質量?
- 如果 $C_2$ 是空間中一條彎曲鐵絲，其密度函數 $\rho(x,y,z)$，如何求質量?
- recall $\int_C \mathrm{d}s$ 可求 $C$ 之弧長

# 空間中曲線求質量

- 如果 $C_1$ 是平面上一條彎曲鐵絲，其密度函數 $\rho(x,y)$，如何求質量？
- 如果 $C_2$ 是空間中一條彎曲鐵絲，其密度函數 $\rho(x,y,z)$，如何求質量？
- recall $\int_C \mathrm{d}s$ 可求 $C$ 之弧長
- 所以 $\int_{C_1} \rho(x,y)\,\mathrm{d}s$ 與 $\int_{C_2} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$ 可分別求出 $C_1$ 與 $C_2$ 之質量

# 空間中曲線求質量

- 如果 $C_1$ 是平面上一條彎曲鐵絲，其密度函數 $\rho(x,y)$，如何求質量？
- 如果 $C_2$ 是空間中一條彎曲鐵絲，其密度函數 $\rho(x,y,z)$，如何求質量？
- recall $\int_C \mathrm{d}s$ 可求 $C$ 之弧長
- 所以 $\int_{C_1} \rho(x,y)\,\mathrm{d}s$ 與 $\int_{C_2} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$ 可分別求出 $C_1$ 與 $C_2$ 之質量
- 此即為線積分

# 空間中曲線求質量

- 如果 $C_1$ 是平面上一條彎曲鐵絲，其密度函數 $\rho(x,y)$，如何求質量?
- 如果 $C_2$ 是空間中一條彎曲鐵絲，其密度函數 $\rho(x,y,z)$，如何求質量?
- recall $\int_C \mathrm{d}s$ 可求 $C$ 之弧長
- 所以 $\int_{C_1} \rho(x,y)\,\mathrm{d}s$ 與 $\int_{C_2} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$ 可分別求出 $C_1$ 與 $C_2$ 之質量
- 此即為線積分
- 由於被積分函數為純量函數，故稱為純量型線積分

# 純量型線積分的計算

- $\boxed{\text{recall}}$ 曲線 $C$ 由參數式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $a \le t \le b$ 所確定, 則其弧長:

$$\int_C \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

# 純量型線積分的計算

- $\boxed{\text{recall}}$ 曲線 $C$ 由參數式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $a \le t \le b$ 所確定，則其弧長:

$$\int_C \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

- 在計算純量型線積分 $\displaystyle\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 時，經常是先將曲線 $C$ 參數化，然後計算類似(1) 的式子:

$$\int_C \mathrm{d}s = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big) \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

## 例題

曲線 $C: \mathbf{x}(t) = \big(\cos(t), \sin(t), t\big)$, $0 \le t \le 2\pi$，函數 $f(x,y,z) = xy + z$，計算線積分 $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

## 例題

曲線 $C: \mathbf{x}(t) = \big(\cos(t), \sin(t), t\big)$, $0 \le t \le 2\pi$, 函數 $f(x,y,z) = xy + z$, 計算線積分 $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

- $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{\big[x'(t)\big]^2 + \big[y'(t)\big]^2 + \big[z'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t$

## 例題

曲線 $C: \mathbf{x}(t) = \big(\cos(t), \sin(t), t\big)$, $0 \le t \le 2\pi$，函數 $f(x, y, z) = xy + z$，計算線積分 $\displaystyle\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s$

- $$\begin{aligned} \int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{\big[x'(t)\big]^2 + \big[y'(t)\big]^2 + \big[z'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \big(\cos(t)\sin(t) + t\big)\sqrt{\big[-\sin(t)\big]^2 + \big[\cos(t)\big]^2 + 1^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

## 例題

曲線 $C:\mathbf{x}(t)=\big(\cos(t),\sin(t),t\big)$, $0\le t\le 2\pi$, 函數 $f(x,y,z)=xy+z$, 計算線積分 $\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

- $$\begin{aligned}\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\big[x'(t)\big]^2+\big[y'(t)\big]^2+\big[z'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{2\pi}\big(\cos(t)\sin(t)+t\big)\sqrt{\big[-\sin(t)\big]^2+\big[\cos(t)\big]^2+1^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin(2t)+t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\boxed{\sin^2(t)+\cos^2(t)=1}$

## 例題

曲線 $C:\mathbf{x}(t)=\big(\cos(t),\sin(t),t\big)$, $0\le t\le 2\pi$, 函數 $f(x,y,z)=xy+z$, 計算線積分 $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

- $$\begin{aligned}\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\big[x'(t)\big]^2+\big[y'(t)\big]^2+\big[z'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{2\pi}\big(\cos(t)\sin(t)+t\big)\sqrt{\big[-\sin(t)\big]^2+\big[\cos(t)\big]^2+1^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin(2t)+t\,\mathrm{d}t \qquad \boxed{\sin^2(t)+\cos^2(t)=1}\\ &= \sqrt{2}\left[\frac{1}{4}\cos(2t)+\frac{t^2}{1}\right]_0^{2\pi}=2\sqrt{2}\pi^2\end{aligned}$$

# 物理的作功問題

- 定力 $\overrightarrow{F}$ 推動物體造成位移 $\overrightarrow{S}$，所作功為 $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{S}$

# 物理的作功問題

- 定力 $\overrightarrow{F}$ 推動物體造成位移 $\overrightarrow{S}$，所作功為 $\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{S}$
- 向量場 $\overrightarrow{F}$ 中，曲線 $C:\overrightarrow{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ 是物體移動路徑，則所作功為 $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}$

# 物理的作功問題

- 定力 $\overrightarrow{F}$ 推動物體造成位移 $\overrightarrow{s}$，所作功為 $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{s}$
- 向量場 $\overrightarrow{F}$ 中，曲線 $C : \overrightarrow{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ 是物體移動路徑，則所作功為 $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$
- 此即為向量型線積分

# 向量型線積分的不同形式

- $\boxed{\text{recall}}$ $\overrightarrow{r}(t)$ 在 $t = t_0$ 處的單位切向量 $\overrightarrow{T}(t_0) = \dfrac{\overrightarrow{r}'(t_0)}{\left|\overrightarrow{r}'(t_0)\right|}$

# 向量型線積分的不同形式

- $\boxed{\text{recall}}$ $\vec{r}(t)$ 在 $t = t_0$ 處的單位切向量 $\vec{T}(t_0) = \dfrac{\vec{r}\,'(t_0)}{\left|\vec{r}\,'(t_0)\right|}$
- $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_C \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}\,'(t)}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|} \left|\vec{r}\,'(t)\right| dt = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$

# 向量型線積分的不同形式

- $\boxed{\text{recall}}$ $\vec{r}(t)$ 在 $t = t_0$ 處的單位切向量 $\vec{T}(t_0) = \dfrac{\vec{r}\,'(t_0)}{\left|\vec{r}\,'(t_0)\right|}$
- $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_C \vec{F}\cdot\vec{r}\,'(t)\,\mathrm{d}t = \int_C \vec{F}\cdot \frac{\vec{r}\,'(t)}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|}\left|\vec{r}\,'(t)\right|\mathrm{d}t = \int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,\mathrm{d}s$
- 故又可寫作 $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,\mathrm{d}s$

# 向量型線積分的微分形式

- 利用微分 (differential)： $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t$

# 向量型線積分的微分形式

- 利用微分 (differential)： $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t$
- 若向量場 $\overrightarrow{F} = \left(P, Q, Q\right)$

# 向量型線積分的微分形式

- 利用微分 (differential)： $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t$
- 若向量場 $\overrightarrow{F} = (P, Q, Q)$
- $\displaystyle\int_a^b \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\,\mathrm{d}t$

# 向量型線積分的微分形式

- 利用微分 (differential)： $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t$
- 若向量場 $\overrightarrow{F} = (P, Q, Q)$
- $\displaystyle\int_a^b \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\,\mathrm{d}t$

$$= \int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

# 向量型線積分的微分形式

- 利用微分 (differential)： $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t, \mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t$
- 若向量場 $\overrightarrow{F} = (P, Q, Q)$
- $\displaystyle\int_a^b \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\,\mathrm{d}t$

$$= \int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

- 此即為向量型線積分的微分形式，看到題目要認得出來

# 兩種線積分比較

- 純量型線積分是密度與微小路徑長不斷相乘累加

$$\int_C \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

# 兩種線積分比較

- 純量型線積分是密度與微小路徑長不斷相乘累加

$$\int_C \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

- 向量型線積分是力與路徑上單位切向量不斷內積累加。

$$\int_C \overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r}$$

# 曲面積分

## 曲面面積

- $\sigma$ 為空間中一段曲面區域，作曲面積分 $\displaystyle\iint_{\sigma} \mathrm{d}S$ 可求出曲面面積。

# 曲面面積

- $\sigma$ 為空間中一段曲面區域，作曲面積分 $\iint_\sigma \mathrm{d}S$ 可求出曲面面積。
- 類比 將 $\sigma$ 壓平成平面 $R$，每一小段 $\mathrm{d}S$ 也被壓成 $\mathrm{d}A$，變成 $\iint_R \mathrm{d}A$。

# 曲面面積

- $\sigma$ 為空間中一段曲面區域，作曲面積分 $\iint_\sigma \mathrm{d}S$ 可求出曲面面積。
- $\boxed{\text{類比}}$ 將 $\sigma$ 壓平成平面 $R$，每一小段 $\mathrm{d}S$ 也被壓成 $\mathrm{d}A$，變成 $\iint_R \mathrm{d}A$。
- 若 $R$ 為 $xy-$ 平面上的區域，$\sigma$ 為 $z=f(x,y)$ 在 $R$ 上所表示的曲面，則 $\sigma$ 的曲面面積為 $\iint_\sigma \mathrm{d}S = \iint_R \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}A$。

$$\iint_{\sigma} \mathrm{d}S = \iint_{R} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, \mathrm{d}A$$

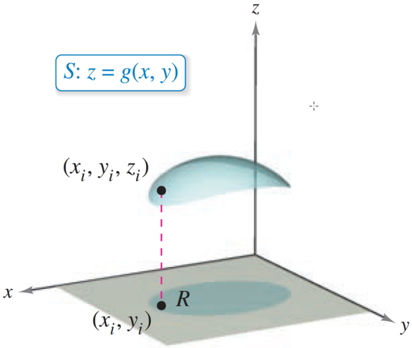



Figure: 求曲面面積

# 參數化曲面求曲面面積

- 若曲面 $\sigma$ 由參數式 $\overrightarrow{X}(u,v)=\begin{cases} x=f(u,v) \\ y=g(u,v) \\ z=h(u,v) \end{cases}$ ,$(u,v)\in R$ 所確定，則

$$\iint_{\sigma} \mathrm{d}S=\iint_{R}\left|\overrightarrow{X}_u\times\overrightarrow{X}_v\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

- 關鍵在於 $\mathrm{d}S = \left|\overrightarrow{X}_u \times \overrightarrow{X}_v\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$（見圖）

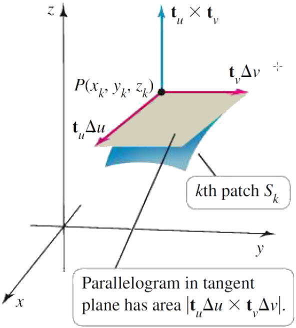



Figure: 曲面微元

# 純量型曲面積分

- 如果 $D$ 是空間中的彎曲鐵片，其密度函數 $\rho(x,y,z)$，如何求質量?

# 純量型曲面積分

- 如果 $D$ 是空間中的彎曲鐵片，其密度函數 $\rho(x,y,z)$，如何求質量?
- 由於 $\int_\sigma \mathrm{d}S$ 可求 $\sigma$ 之曲面面積

# 純量型曲面積分

- 如果 $D$ 是空間中的彎曲鐵片，其密度函數 $\rho(x, y, z)$，如何求質量?
- 由於 $\int_\sigma \mathrm{d}S$ 可求 $\sigma$ 之曲面面積
- 所以 $\int_D \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}S$ 可求出 $D$ 之質量

# 純量型曲面積分

- 如果 $D$ 是空間中的彎曲鐵片，其密度函數 $\rho(x,y,z)$，如何求質量?
- 由於 $\displaystyle\int_\sigma \mathrm{d}S$ 可求 $\sigma$ 之曲面面積
- 所以 $\displaystyle\int_D \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 可求出 $D$ 之質量
- 此即為曲面積分

# 純量型曲面積分

- 如果 $D$ 是空間中的彎曲鐵片，其密度函數 $\rho(x,y,z)$，如何求質量?
- 由於 $\displaystyle\int_\sigma \mathrm{d}S$ 可求 $\sigma$ 之曲面面積
- 所以 $\displaystyle\int_D \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 可求出 $D$ 之質量
- 此即為曲面積分
- 由於被積分函數為純量函數，故稱為純量型曲面積分。

### 例題

計算 $\iint_{\sigma}\left(1+x^2+y^2+3z\right)\mathrm{d}S$, 其中 $\sigma$ 為曲面 $z=x^2+y^2$ 在 $x^2+y^2\leq 9$ 的部分。

## 例題

計算 $\iint_\sigma (1+x^2+y^2+3z)\,\mathrm{d}S$, 其中 $\sigma$ 為曲面 $z=x^2+y^2$ 在 $x^2+y^2\le 9$ 的部分。

- $z=x^2+y^2 \Rightarrow z_x=2x, z_y=2y \Rightarrow \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}$

### 例題

計算 $\iint_\sigma (1+x^2+y^2+3z)\,\mathrm{d}S$, 其中 $\sigma$ 為曲面 $z=x^2+y^2$ 在 $x^2+y^2\le 9$ 的部分。

- $z=x^2+y^2 \Rightarrow z_x=2x, z_y=2y \Rightarrow \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}$
- 所求為 $\iint_{x^2+y^2\le 9}\left[1+x^2+y^2+3(x^2+y^2)\right]\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

## 例題

計算 $\iint_\sigma (1+x^2+y^2+3z)\,\mathrm{d}S$, 其中 $\sigma$ 為曲面 $z=x^2+y^2$ 在 $x^2+y^2\le 9$ 的部分。

- $z=x^2+y^2 \;\Rightarrow z_x=2x, z_y=2y \;\Rightarrow \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}$
- 所求為 $\iint_{x^2+y^2\le 9}\left[1+x^2+y^2+3(x^2+y^2)\right]\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^3 (1+4r^2)\sqrt{1+4r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

**例題**

計算 $\iint_\sigma (1+x^2+y^2+3z)\,\mathrm{d}S$, 其中 $\sigma$ 為曲面 $z=x^2+y^2$ 在 $x^2+y^2\le 9$ 的部分。

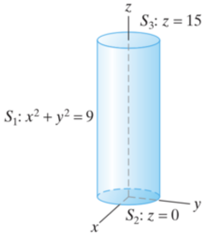
- $z=x^2+y^2 \Rightarrow z_x=2x, z_y=2y \Rightarrow \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}$
- 所求為 $\iint_{x^2+y^2\le 9}\left[1+x^2+y^2+3(x^2+y^2)\right]\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (1+4r^2)\sqrt{1+4r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi\int_1^{37} u\sqrt{u}\,\frac{1}{8}\,\mathrm{d}u$$

### 例題

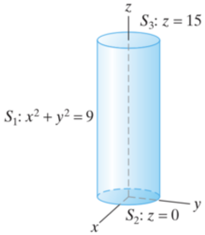
直圓柱面 $S$ 之底面為 $xy-$ 平面上以原點為中心、3 為半徑的圓，$S$ 的高為 15。試求 $\iint_S z\mathrm{d}S$。



## 例題

直圓柱面 $S$ 之底面為 $xy-$ 平面上以原點為中心、3 為半徑的圓，$S$ 的高為 15。試求 $\iint_S z\,dS$。

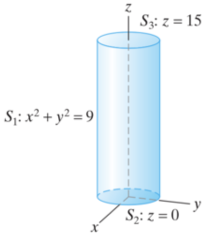
- $S$ 的側面為 $S_1:\begin{cases} x=3\cos(u) \\ y=3\sin(u) \\ z=v \end{cases}, 0\le u\le 2\pi, 0\le v\le 15$



## 例題

直圓柱面 $S$ 之底面為 $xy-$ 平面上以原點為中心、3 為半徑的圓，$S$ 的高為 15。試求 $\iint_S z\,\mathrm{d}S$。

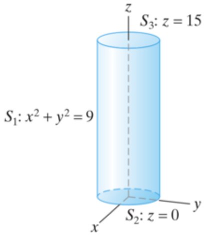
- $S$ 的側面為 $S_1:\begin{cases} x=3\cos(u) \\ y=3\sin(u) \\ z=v \end{cases}, 0\le u\le 2\pi, 0\le v\le 15$
- 底面為 $S_2:\begin{cases} x=u\cos(v) \\ y=u\sin(v) \\ z=0 \end{cases}, 0\le u\le 3, 0\le v\le 2\pi$



## 例題

直圓柱面 $S$ 之底面為 $xy-$ 平面上以原點為中心、3 為半徑的圓，$S$ 的高為 15。試求 $\iint_S z\,\mathrm{d}S$。

- $S$ 的側面為 $S_1 : \begin{cases} x = 3\cos(u) \\ y = 3\sin(u) \\ z = v \end{cases}, 0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 15$
- 底面為 $S_2 : \begin{cases} x = u\cos(v) \\ y = u\sin(v) \\ z = 0 \end{cases}, 0 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\pi$
- 頂面為 $S_3 : \begin{cases} x = u\cos(v) \\ y = u\sin(v) \\ z = 15 \end{cases}, 0 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\pi$。



- $\iint_{S_1} z\,\mathrm{d}S = \int_0^{15}\int_0^{2\pi} v \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3\sin(u) & 3\cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$

- $$\iint_{S_1} z\,\mathrm{d}S = \int_0^{15}\int_0^{2\pi} v\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3\sin(u) & 3\cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{15}\int_0^{2\pi} v\left|3\cos(s)\mathbf{i} + 3\sin(s)\mathbf{j}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

- $$\iint_{S_1} z\,\mathrm{d}S = \int_0^{15}\int_0^{2\pi} v \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3\sin(u) & 3\cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{15}\int_0^{2\pi} v \left| 3\cos(s)\mathbf{i} + 3\sin(s)\mathbf{j} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$= 3\int_0^{15}\int_0^{2\pi} v\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = 675\pi$$

- $$\iint_{S_1} z\,\mathrm{d}S = \int_0^{15}\int_0^{2\pi} v\left\|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3\sin(u) & 3\cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right\| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{15}\int_0^{2\pi} v\left|3\cos(s)\mathbf{i} + 3\sin(s)\mathbf{j}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$= 3\int_0^{15}\int_0^{2\pi} v\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = 675\pi$$
- $$\iint_{S_2} z\,\mathrm{d}S = 0$$

此處之 $z$ 值恆為 0

- $$\iint_{S_1} z\,\mathrm{d}S = \int_0^{15}\int_0^{2\pi} v \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3\sin(u) & 3\cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{15}\int_0^{2\pi} v \left| 3\cos(s)\mathbf{i} + 3\sin(s)\mathbf{j} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$= 3\int_0^{15}\int_0^{2\pi} v\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = 675\pi$$
- $$\iint_{S_2} z\,\mathrm{d}S = 0$$ 此處之 $z$ 值恆為 0
- $$\iint_{S_3} z\,\mathrm{d}S = 15\iint_{S_3} \mathrm{d}S = 135\pi$$ 此處之 $z$ 值恆為 15

- $$\iint_{S_1} z\,\mathrm{d}S = \int_0^{15}\int_0^{2\pi} v \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3\sin(u) & 3\cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{15}\int_0^{2\pi} v \left| 3\cos(s)\mathbf{i} + 3\sin(s)\mathbf{j} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$= 3\int_0^{15}\int_0^{2\pi} v\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = 675\pi$$
- $$\iint_{S_2} z\,\mathrm{d}S = 0$$ 此處之 $z$ 值恆為 0
- $$\iint_{S_3} z\,\mathrm{d}S = 15\iint_{S_3} \mathrm{d}S = 135\pi$$ 此處之 $z$ 值恆為 15
- $$\iint_S z\,\mathrm{d}S = \iint_{S_1} z\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} z\,\mathrm{d}S + \iint_{S_3} z\,\mathrm{d}S$$

- $$\iint_{S_1} z\,\mathrm{d}S = \int_0^{15}\int_0^{2\pi} v\left\|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3\sin(u) & 3\cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right\| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{15}\int_0^{2\pi} v\left|3\cos(s)\mathbf{i} + 3\sin(s)\mathbf{j}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$= 3\int_0^{15}\int_0^{2\pi} v\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = 675\pi$$
- $$\iint_{S_2} z\,\mathrm{d}S = 0$$ 此處之 $z$ 值恆為 0
- $$\iint_{S_3} z\,\mathrm{d}S = 15\iint_{S_3} \mathrm{d}S = 135\pi$$ 此處之 $z$ 值恆為 15
- $$\iint_S z\,\mathrm{d}S = \iint_{S_1} z\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} z\,\mathrm{d}S + \iint_{S_3} z\,\mathrm{d}S$$
$$= 675\pi + 0 + 135\pi = 810\pi$$

## 向量型曲面積分

曲面 $\sigma$ 由參數式 $\mathbf{X}(u,v)=\begin{cases} x=f(u,v) \\ y=g(u,v) \\ z=h(u,v) \end{cases}, (u,v)\in D$ 所確定，向量函數 $\vec{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ 在曲面 $\sigma$ 上的曲面積分為

$$\begin{aligned}\iint_\sigma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \\ &= \iint_D \vec{F}\cdot(\mathbf{X}_u\times\mathbf{X}_v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ f_u & g_u & h_u \\ f_v & g_v & h_v \end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

## 例題

設 $\overrightarrow{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{k} + (z-2y)\,\mathbf{k}$, 計算 $\iint_\sigma \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{S}$, 其中
$\sigma : \mathbf{X}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), v)$ , $0 \le s \le 1, 0 \le t \le 2\pi$ 。

## 例題

設 $\overrightarrow{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{k} + (z-2y)\mathbf{k}$, 計算 $\iint_\sigma \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$, 其中 $\sigma : \mathbf{X}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), v)$ , $0 \le s \le 1, 0 \le t \le 2\pi$ 。

- $\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 1 \end{vmatrix} = \sin(v)\,\mathbf{i} - \cos(v)\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}$

## 例題

設 $\overrightarrow{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{k} + (z-2y)\mathbf{k}$, 計算 $\iint_\sigma \overrightarrow{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$, 其中 $\sigma : \mathbf{X}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), v)$ , $0 \le s \le 1, 0 \le t \le 2\pi$ 。

- $\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 1 \end{vmatrix} = \sin(v)\,\mathbf{i} - \cos(v)\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
- $\iint_\sigma \overrightarrow{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \big(u\cos(v)\,\mathbf{i} + u\sin(v)\,\mathbf{j} + (v - 2u\sin(v))\,\mathbf{k}\big)\cdot\big(\sin(v)\,\mathbf{i} - \cos(v)\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \big(uv - 2u^2\sin(v)\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \pi^2$

# 散度定理與旋度定理

- Nabla 算子： $\nabla := \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$
- 梯度： $\nabla f(x, y, z) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$

- Nabla 算子： $\nabla := \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
- 梯度： $\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$
- 散度： $\nabla \cdot \overrightarrow{F} = P_x + Q_y + R_z$

- Nabla 算子: $\nabla := \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$
- 梯度: $\nabla f(x,y,z) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$
- 散度: $\nabla \cdot \overrightarrow{F} = P_x + Q_y + R_z$
- 旋度: $\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

### 高斯散度定理

向量函數 $\overrightarrow{F}=(P,Q,R)$，$\Omega$ 為有界的三維區域，其邊界 $\partial\Omega$。則

$$\oiint_{\partial\Omega}\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{S}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}V$$

散度定理退化成二維，即為 Green 定理一。

### 高斯散度定理

向量函數 $\vec{F}=(P,Q,R)$，$\Omega$ 為有界的三維區域，其邊界 $\partial\Omega$。則

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{F}\,\mathrm{d}V$$

散度定理退化成二維，即為 Green 定理一。

### 向量形式的 Green 定理一

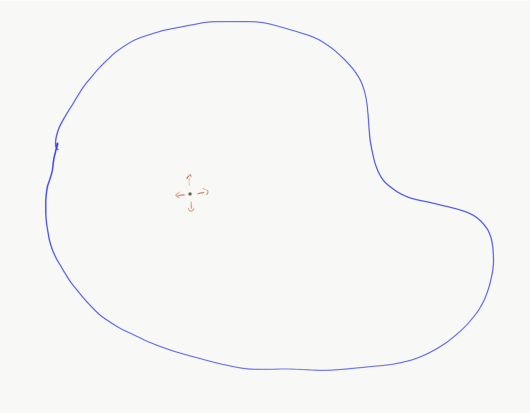
向量函數 $\vec{F}=(P,Q)$，$D$ 為有界的二維區域，其邊界 $\partial D$。則

$$\oint_{\partial D} \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \iint_{D} \nabla\cdot\vec{F}\,\mathrm{d}A$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial D} P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x = \iint_{D} \left(P_x + Q_y\right)\mathrm{d}A$$

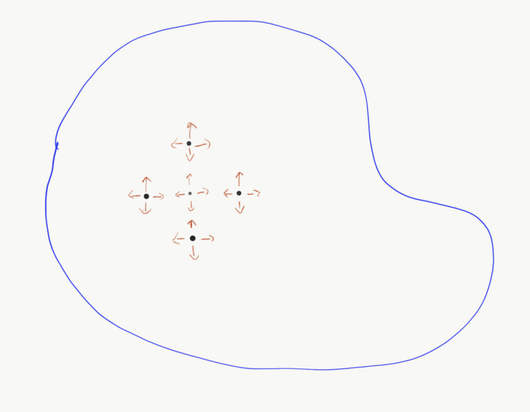
# 不嚴謹的方式理解散度定理

對於區域中某一點，畫出向外箭頭表示其發散程度。



# 不嚴謹的方式理解散度定理

接著標出左右鄰居，並標示發散程度



# 不嚴謹的方式理解散度定理

左右鄰居們的發散程度彼此抵消，整個區域消到最後剩：