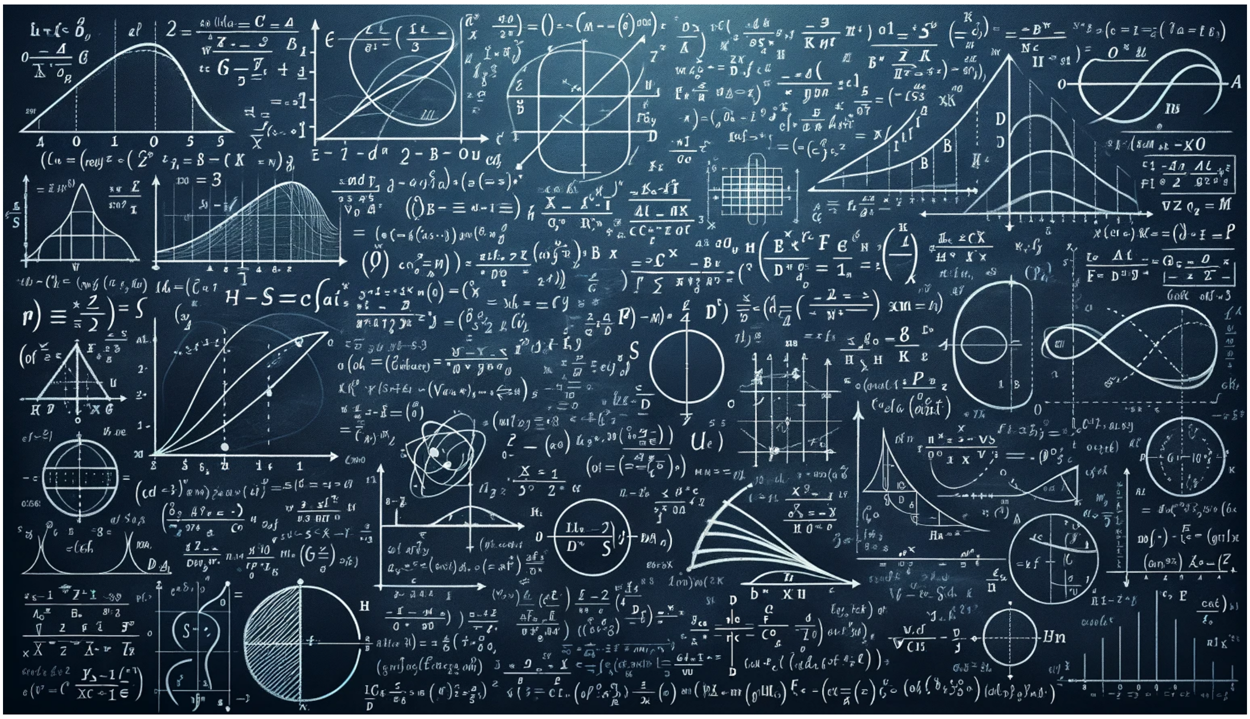
寫給高中生的微積分簡介

第六版

A Brief Introduction to Calculus
for Senior High School Students

sixth edition



卓永鴻

中華民國 113 年

作者序

筆者多年來教授大一微積分，在與同學的互動中，深深覺得許多人微積分這門學科表現之所以不理想，並非是天資極度不佳或學習態度不良，而是沒有抓到其中精神，對其印象還停留在抽象符號操作，於是不得其門而入。而透過我的闡釋使對方明白微積分中各個主題在做什麼後，對方往往恍然大悟，能變得開始上手。因此在 2012 年開始逐漸寫作微積分教學，希望幫助更多大一同學可以了解微積分在說什麼。

而後在高中數學的教學中，亦時常遇到類似情況。還有明星學校學生表示，做題都知道如何做出正確答案，但實在不知道自己在學什麼東西。因此我從 2017 年開始，從寫過的大學微積分主題中，抽出與高中重疊的部分，改寫成可以給高中同學看的樣子，希望也能對高中同學有幫助。此後每年改版，直到 2021 年的第五版，時隔三年，現在改寫爲第六版。

本文並不打算取代高中數學教材，所以並不完整覆蓋所有你在高中學到的微積分題材（不過第六版已經盡可能貼近 108 課綱了），也沒特別針對段考題型、指考題型（不過第九章有選幾題來解答）。而是希望可以用淺顯易懂的方式，提供同學一些對微積分的感覺，對微積分的印象不再只是操作無感的符號。先看了本文之後，再回到原本的高中微積分課堂。

本文先說明微積分的用處、盡可能生動地介紹概念的由來、談一點點微積分發展史、點出微積分學的精神，還有提供解釋詳細的解題步驟，讓同學對於微積分可以有比較清楚的圖像。另外也針對常見的錯誤進行說明，避免同學有不正確觀念、考試作答失分。

值得注意的是，在高中課程中，經常有老師教超綱的東西，我將這些搜集在第 10 章進階題材裡面。修改第六版時，我在此章多了 10-5 羅必達法則的離散版本：Stolz 定理，這是因應許多同學對於數列極限使用羅必達，因此放進來介紹，你可以改用這個。

若是讀完此文後，你覺得確實對你有幫助、行文風格是對你味的，上大學後歡迎參考我寫的《白話微積分》，五南出版社。並可到我架設的網站：微積分福音，觀看微積分相關資源，網址是 http://CalcGospel.top（由於一些技術上的失誤，這個網址和以前不一樣，舊的網址已經失效了！收藏舊網址的朋友們，麻煩你們更新了！萬一以後又有類似問題，請 Google 搜尋微積分福音。）。

自從本文第一版於民國 106 年 3 月發佈、每年 3 月更新，就有不少高中老師拿去印給學生，或是直接拿去當上課教材。其中部分老師並未告知，或者事後告知。其實此文本來就是直接無償分享，後來甚至是當作給我的《白話微積分》打知名度的方式，所以您這樣使用我只會高興而不會不同意，但還是希望能來信告知我，我就想知道一下。

聯繫我可來信：mail@CalcGospel.top，或者上網站的「關於我」找聯繫方式。

卓永鴻

2024 年 3 月

作者介紹

卓永鴻，出生於高雄鳳山。求學經歷爲高雄縣立中正國小、宜蘭縣立順安國小、宜蘭縣立順安國中、台北縣立尖山國中、台北市立建國高中、國立臺灣大學歷史系、國立臺灣大學數學系碩士班。

象棋初段（其實殺三段很容易，沒報名升段而已）、LaTeX 工作室 2021 排版大賽二等獎。

任教過高中數學、高中資優班學生輔導、高中數學競賽、大一微積分、轉學考微積分、研究所微積分、數學系高等微積分、機率論、隨機過程；中國大陸專升本高等數學、考研數學；AP Calculus、A Level Math、A Level Further Math、AMC、澳洲 AMC、Euclid Contest。

我在臺灣大學歷史系大三時，＜史學思想史＞這門課的老師和我們談了 occupation 職業和 vocation 志業有什麼不同。對於一些史學家來說，史學就是他們的 vocation ，而各位同學們的 vocation 是什麼呢？

我覺得，我的 vocation 志業，或者從這個字的拉丁文字源來說，呼召，就是透過數學教學來幫助他人。我希望我可以分享的是，我作爲一個天賦一般的學生，是怎麼樣讀數學的，讓別人也可以不再畏懼數學。

後來我穩定在教會聚會，也明確收到了上帝的呼召，我要用教學來服事人。

當我在國立臺灣大學學習期間，我曾有機會擔任臺大教學發展中心微積分課輔小老師，面向全校各系解答許多類型的疑難。在這期間，深切體會到許多學生感到微積分困難的原因，並不一定是能力問題，也不是自己不願努力，很多是沒有遇到合適的教學方式和教材，進行了事倍功半的學習。

當時，我除了親自教學來爲同學解惑、啟發，也會推薦一些工具、線上資源、優秀的書。但若論到要推薦什麼微積分教科書給同學呢？外文教材往往上千頁，不但貴還不容易啃下，也有可能同學不是理工科系的，他們班本來就不使用原文書。本土老師自己寫的教材呢？確實有不少好書，但那些都絕版了！坊間只能買到台灣一些補習班老師出的書，~~但那些~~（由於我後來已經完成出書，便不方便忠實呈現我個人的評價了）。既然缺乏好書可以推薦同學們看，那就自己來了！

因此，在學習了排版語言 LaTeX 之後，我於 2012 年 7 月開始著手寫微積分教學，想將我平常那些幫助同學們理解的獨特的闡釋方式出版成冊，以便幫助到更多的同學。

當時兼顧課業和工作的情況下還要寫這個，要寫完全書不知要何年何月，而且當時的我對於如何把圖給畫好很感頭疼[1]。如果我寫作期間每多拖一年，就會眼睜睜看著一屆同學錯過而幫不上他們。因此，我架設了網站，在我將書籍完成出版以前，先把寫好的主題上傳上來，就可以開始幫助到許多同學。網站的名稱「微積分福音」，這是受到了一位交大教授的線性代數教學 blog 「線代啟示錄」的啟發。新約聖經最後一卷書是啟示錄，而前幾卷是福音書。「福音」這個名字也訴說了我的初衷：聖經當中說，福音不是給義人的，是給罪人的。而我寫作也不是爲了那些已經擅長數學的人，而是爲了那些可能因爲各種原因而與數學有所隔閡的學生，爲他們提供平易近人的教學，幫助他們明白微積分的眞正含義，使之不再像是外星文字。

[1]後來苦練出來了，書籍出版以後，有些讀者明確表示書中的圖非常受用！

看什麼看？沒看過空白頁？

This page is intentionally left blank

目錄

第 1 章

微積分的用處與起源

微積分學，是人類思維的偉大成果之一。這門學科乃是一種憾人心靈的智力、奮鬥的結晶；這種奮鬥已經經歷了兩千五百多年之久，它深深札根於人類活動的許多領域之中

Richard Courant

高中自然組同學在高三下會接觸到一點點微積分，而到了大學以後，大多數的生醫理工科系、商管類科系的同學都必須修習大一微積分。微積分這一科已經近乎是大學生的共同必修，且又是大多數同學的夢魘。究竟，微積分有什麼用，以致於這麼多人必須面對它，以及它是如何產生的呢？

微積分學的發展與應用，影響了非常多的領域。舉凡金融精算、經濟學、商業管理、醫藥、生物、機械、水利、土木、建築、航空及航海，特別是物理學，它的發展必須大量使用到微積分。在微積分這門學問中，我們更多地認識了實數，促進我們對於函數更多認識，我們學會如何求變化率、怎麼求極大極小值、怎麼求曲線的弧長及其所圍的面積、怎麼求曲面的表面積及其所圍的體積、怎麼作近似計算等等。正如微積分的英文 calculus [1]，它可以說是高等數學中的基本運算法則。微積分是一種革命性的數學思想，靠它可以解決以往未解決的許多難題，也可以更輕易地對付已解決但不好處理的問題。除了微積分本身可以直接應用在許多領域外，許多數學學科諸如統計學、微分方程、機率論、微分幾何、傅立葉分析等等，皆奠基於微積分而發展，而它們也都被應用在許多其它領域。可以毫不誇張地這麼說，沒有微積分，就沒有現代科學文明。

隨便舉些例子來說，電機系會學「訊號與系統」，而在這門課就大量地處理許多困難的積分問題。對於物理系來說，計算作功、轉動慣量、磁通量等等，皆大量使用了微積分，流體力學用到向量微積分與微分方程、相對論用到微分幾何。國企系、財金系、經濟系等等，也會用到微積分的概念來研究金融與經濟，甚至在經濟系的高年級或研究所的同學，還學到高等微積分 [2] 以上來進一步研讀經濟理論。而近年很火紅的機器學習，同樣用到許多高等數學，諸如微積分、線性代數、機率統計等等。

課程概述	地殼變形為形塑地形的重要因子之一，也是提供地形與山脈發育的重要動力。由於地球內部的營力作用，地表與地殼中的岩石會產生變形。反過來說，我們可以利用測地學方法對地表進行觀測，進而反推各種營力在不同時空尺度下的作用情形。本課程講解測地學的基本原理、大地與衛星測量及雷達遙測在地殼變形觀測上的應用、介紹觀測的實作方式、以及講授地殼變形的基本理論與程式使用。本課程適合已修習或接觸過微積分、統計學、地質學、地形學與遙測學的高年級大學部與研究生選修，作為統合以上學科於地表監測與地形演育的應用課程。

圖 1.1: 台大地理系「地殼變形原理與觀測」課程大綱

那麼，微積分又是如何被發展起來的呢？眾所周知，微積分是在十七世紀末，由牛頓和萊布尼茲所發明的。其實這樣講，並不是說他們獨自從頭建立起整個微積分學說。事實上，微積分的概念，早在古希臘時代便已萌芽。到了十七世紀時，數學逐漸開始高度發展，有許多數學家致力於微分學與積分學的工作。後來由牛頓與萊布尼茲，集其大成、進一步突破，而形成微積分學說。

微積分的思想源流，最早可推溯到公元前五世紀的希臘數學家 Eudoxus（*Εὔδοξος*），他發展了窮盡法，將圓視爲圓內接多邊形的極限、將無理數視爲有理數的極限。到後來公元前三世紀的阿基米德（Archimedes *Ἀρχιμήδης*），也使用窮盡法來處理許多體積與面積的問題，將窮盡法發揚光大。

到了大約十六、十七世紀的時候，人們開始想對於物理問題，做一些定量的研究。在此之前，流行的是亞里斯多德的物理學，對於物理問題是以定性的探討爲主。而且當中有很多描述，與我們現在物理學上的認知是有出入的。譬如說，物體的重量越大，其趨向天然位置的傾向也越大，所以其下落的速度也越大；天體是由特殊質料構成的，具有特殊性質。天體是神靈們的處所，所以天體的運動是沿著最完美的曲線，也就是圓周，

[1]這一詞來自拉丁文，其原意爲計算用的小石子，羅馬人用 calculus 來進行計算與賭博。

[2]高等微積分是數學系大二的必修，將許多大一微積分所未談，或是講得很隨便的地方，作嚴格的探討。如果大一微積分的難度是八千，那麼高等微積分起碼是十萬。

且是以最完美的速度，也就是等速運動來作運動。以上這些我們今日聽來荒謬，都是當時被奉爲圭臬的概念。大約十六世紀中期開始，興起了一股反對亞里斯多德學說的思潮，他們對於阿基米德的方法大爲崇拜。譬如說十六世紀末物理學家伽利略，他就希望能有別於這種定性的、原因方面的探討，作些定量上 [3] 的、現象方面的描述。於是在比薩斜塔做了落體實驗，發現重球與輕球看起來是同時落地的。這個時期，就是文藝復興時期的科學革命。在此期間，科學研究開始快速發展。

在當時的物理與數學中，啟發微積分快速發展的，有四大問題：

1. 研究物理中的非等速運動
2. 作出曲線的切線與法線
3. 找出函數的極大值、極小值
4. 求曲線所圍出的面積，及曲線的弧長

我們先來看第四個問題。多邊形的面積我們都會計算，可是一但一個幾何形狀不是由直線段圍成的，而是由曲線圍成的，那該怎麼辦呢？曲線所圍面積之中，最常見最基本的例子就是圓的面積。如前所述，早在西元前六世紀的 Eudoxus 和前三世紀的阿基米德，就用窮盡法來求圓周率及圓面積。後來西元三世紀，三國時代的劉徽也做了類似的事。他用割圓術 [4] 逼近圓的面積，其內涵是透過內接正多邊形的方式來逼近圓。

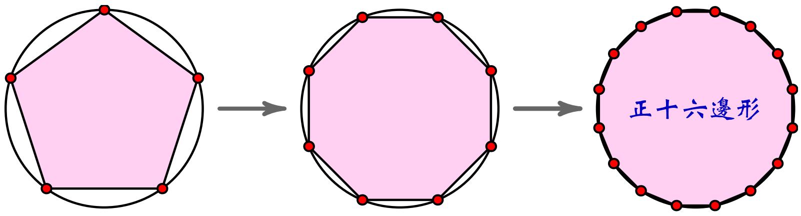


圖 1.2: 圓內接多邊形

我們在圖 1.2 可見，圓內接正 16 邊形看起來就已經跟圓相當接近了。而實際上劉徽用到正 96 邊形，到了南北朝的祖沖之，更是內接了正 24576 邊形 [5]。我們用數學式子把這件事寫下來：

性質 1.0.1　圓內接正多邊形逼近圓

設 A 爲我們要計算的圓面積，A_3 爲圓內接正三角形面積，A_4 爲圓內接正方形面積。以此類推，A_n 爲圓內接正 n 邊形面積。於是當 n 越來越大、無止盡地大下去。換句話說，當 n 趨近於無窮大的時候，圓內接正 n 邊形趨近到圓，A_n 便會趨近於圓面積 A。這件事若用數學式子表示，便是：

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \tag{1.1}$$

式子 (1.1) 是極限的數學寫法，將英文字 limit 去掉末兩個字母，然後掛在 A_n 的左邊，用以表示 A_n 的極限。下面標示 $n\to\infty$ [6]，用意是告訴讀者，足碼（index number）是誰。在這裡我們的足碼是 n，接著表達這個極限是 n 趨近無窮大，A_n 會隨之趨近到何值。

[3] 達文西：「人們的探討不能稱爲是科學的，除非通過數學上的說明和論證。」

[4] 劉徽：「割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。」

[5] 祖沖之所估計的圓周率已經精確到小數點後七位，相當於千萬分之一的誤差，這已是相當難得的。

[6] 羅馬人常用一千這數字來代表「多」。而在羅馬數字中，1000 的其中一個寫法是 CIↃ。後來十七世紀，微積分先鋒之一的英國數學家 John Wallis，他在其著作《無窮的算術》中，將 CIↃ 略作變形，寫成 ∞ 以表示無窮大。

積分學就是源自求曲線下所圍面積的問題，其所用的就是這種類似割圓術的辦法。我們這裡只是先作很粗略的介紹，先讓你看看積分學是在探討什麼問題，暫時不正式地去討論積分。

接著我們來看第二個問題：求曲線的切線斜率。如果在曲線中取兩個點，將兩點之間拉出一條割線，那麼這條割線的斜率我們都會做，就是寫下 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$。但如果是給定一個點當作切點，並作過此切點的切線，應該如何求此切線的斜率呢？我們先看一下右圖，若以圖中的 A 點爲切點，過 A 有一條切線。若將 A 點依序與 B、C、D、E 分別都拉出割線，我們可發現這些割線越來越靠近切線。

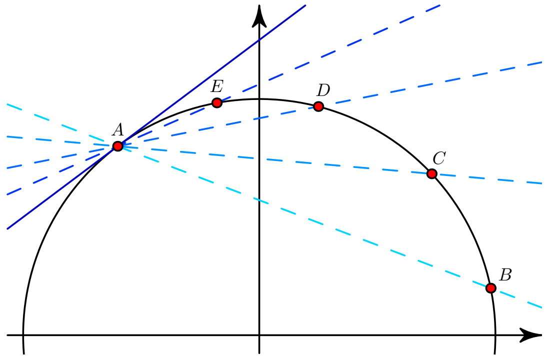


圖 1.3: 割線逼近切線

這就是微分學的想法了，微分就是在做曲線上的切線斜率。其想法是，利用我們會算的割線斜率，去趨近到切線斜率。如果切點的座標是 (x_1, y_1)，然後先找附近一個點 (x_2, y_2)，拉出割線斜率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$。接著我們將切點 (x_1, y_1) 固定不動，讓 (x_2, y_2) 趨近到切點 (x_1, y_1)。於是割線斜率就會越來越趨近到切線斜率了。我把這個想法整理如下：

性質 1.0.2　割線逼近切線

若 P 點是 $y = f(x)$ 上的一點，L 是以 P 當切點所作的切線，而 P_2 是 $y = f(x)$ 上的一動點。如果

$$\lim_{P_2 \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1.2}$$

這個極限是存在的，其值等於 m，那麼 m 就是切線 L 的斜率。

這裡也只是先很粗略介紹什麼是微分，你看懂看不懂都無所謂，我們現在暫不實際去求切線斜率。

總結以上，微分學來自求切線問題，而積分學則來自求面積問題。兩者看似截然不同，但這當中卻隱含著重要的關係：

$\boxed{\text{它們事實上是反問題！}}$

當十七世紀數學家們不斷在微分學與積分學上有些突破時，慢慢開始有些人看出二者間的關係，譬如說牛頓的老師 Issac Barrow。最後是由牛頓與萊布尼茲，他們都明確指出微分與積分的互逆性，將微積分集大成。所以，大家公認是由他們倆發明微積分。

在以上的介紹當中，微分與積分都牽涉到極限。極限的概念是微積分的基礎，所以市面上各家大一微積分教科書，幾乎都是從極限開始作介紹 [7]。讓讀者先明白何謂極限，並且能自己動手計算極限，接著才繼續介紹微分以及積分。

[7] 有一本書叫作 Calculus Without Limits : Almost，然而它還是用到極限了。

第 2 章

數列的極限

在一切理論成果中，未必再有什麼像 17 世紀後半葉微積分的發明那樣被看作人類精神的最高勝利了。只有微積分學才能使自然科學有可能用數學來不僅僅表明狀態，並且也能表明過程。

德國哲學家恩格斯

■ 2.1 數列及其極限

將數字一個個地排成一列，就是數列。舉例來說，訪查班上同學家庭年收入，得到 155, 99, 238, 133, 175,⋯（單位：萬元）這樣就是一個數列，顧名思義，只不過把數字排成一列。

有時候，數列中的每一個數，可能會依循某種規律。譬如說等差數列

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \ldots, 91 \tag{2.1}$$

其規律就是第一項爲 4，後面每到下一項就增加 3，一直列到 91。像這種情況，通常我們簡單列個幾項，別人就知道我們想表達的數列。但這件事如果要嚴格說起來，眞是這樣嗎？譬如說，我列出數列前四項爲 1,4,9,16，你知道我的第五項是什麼嗎？你心想：「嘿嘿！這豈不簡單！? 不就 25 嗎 ?」此時我奸巧地回答：「哈哈！我的第五項是 π 啦！因爲我的**一般式** 是 $n^2+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(\pi-n^2)}{24}$ 呀 !」。

當書寫者非常確定讀者可以掌握規律，便簡單寫幾項。如果沒有這樣的把握，那麼在寫下數列時，就會選擇寫清楚到底規律是什麼。其中一種標示規律的方法，就是給出一般式。舉例來說，

$$\langle a_n\rangle = 3n+1,\quad 1\le n\le 30 \tag{2.2}$$

就很清楚地告訴人家，第一項 a_1 就代 $n=1$ 得到 4，a_2 代 $n=2$ 得到 7。總共有 30 項，$a_{30}=91$。其實這個就是我上面列的那個等差數列 (2.1)，要認出並不困難，從 $3n$ 可看出，當 n 每增加 1，一般項 a_n 就增加 3，所以是等差數列，其公差爲 3。又代 $n=1$，得知首項爲 4。

如果要列出等比數列，可能長得像這樣

$$\langle a_n\rangle = 5\cdot 3^n,\ 1\le n\le 20 \tag{2.3}$$

可以看出，當 n 每增加 1，一般項 a_n 就變爲 3 倍，所以是等比數列，公比爲 3。又代 $n=1$，得知首項爲 15。

另一種標示規律的方法，是使用**遞迴式**。舉一例像是

$$\begin{cases} a_1=4 \\ a_n=a_{n-1}+3 \quad ,2\le n\le 30 \end{cases} \tag{2.4}$$

遞迴是層遞迴返的意思，想要寫出這個數列的某一項，須使用這個數列本身的前一項或前幾項來計算其值。以此例來說，在第二項以後，每一項都是將前一項再加上 3 而得到。當然也要注意，必須講清楚第一項 a_1，才有辦法套用遞迴關係得到 a_2、a_3、⋯，否則光是知道這個前後項關係也沒用。

如果一個數列是用遞迴式定的，有時候可以找出它的一般式。像是我所給的遞迴式，有看出來嗎，又是那個等差數列 (2.1) 了！但有時候也不好找，例如費布那西數列

$$a_1=1, a_2=2, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,\ n\in\mathbb{N} \tag{2.5}$$

你能找出一般式嗎？一般式爲

$$\langle a_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{2.6}$$

數列的項數不一定是有限項，也可能是無限多項，停不下來。這種數列稱之爲**無窮數列**。例如將等差數列(2.1)由 30 項擴寫爲無窮數列，便成

$$\langle a_n \rangle = 3n+1, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.7}$$

明顯地，這個數列會越來越大，無止盡地大下去。

數列的取值並不一定都無止盡地變大，也有可能無窮數列的趨勢是越來越接近一個定值。這件事情，我們可以用極限式來表示。

定義 2.1.1　數列的極限

若 n 越來越大，以致於無窮大時，a_n 便跟著越來越靠近 L。那麼我們就說，當 $x \to \infty$ 時，$a_n \to L$。若以極限式的寫法就是

$$\lim_{x\to\infty} a_n = L \tag{2.8}$$

舉例來說，在《莊子•天下》裡有一句話：「一尺之棰，日取其半，萬世不竭。」所以我們便有莊子數列：$\langle a_n \rangle = \frac{1}{2^n}$，這是一個公比爲 $\frac{1}{2}$ 的無窮等比數列。明顯地，隨著 n 越來越大，莊子數列的一般項 a_n 應該會越來越小、越來越接近 0。所以莊子數列的極限就是 0。在符號上，我們記爲

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{2.9}$$

用以表達當 n 越來越大的時候，數列的一般項 a_n，會趨近到 0。

必須強調一點: 極限值與數列取值是不一樣的概念 。我們說 a_n 趨近到 0，並不是在說它會變成 0。可能會，也可能不會，總之與極限值是不同概念。以莊子數列來說，我們注意那句「萬世不竭」。雖說古人沒有分子的概念，以致這句話若是以物理的觀點來說其實是錯的，你無法眞的將物體一直切一半切不停。但其傳達的意思就是說，雖然是會一直變小下去，小到越來越接近 0，但其實它並沒有眞正變 0 的一天。若從數學式上來看，無論你對於 n 代入多少，$\frac{1}{2^n}$ 都不會是 0 。

當數列的趨勢是越來越趨近到一個定值時，我們說它極限存在，這個數列是收斂的。如果數列並沒有趨近到一個定值，我們就說它極限不存在，這個數列是發散的。所謂發散，就是不收斂。發散有兩種情況，一種情況例如 $\langle a_n \rangle = (-1)^n$，其數列取值一直在 $1, -1$ 跳來跳去，並不趨近一個定值。另一種情況卽趨近到無窮大。此時雖然算是極限不存在，但這種情況我們依然可用極限式來表示。

定義 2.1.2　數列的極限

若 n 越來越大，以致於無窮大時，a_n 便跟著也越來越大，以致於無窮大。那麼我們就說，當 $n \to \infty$ 時，$a_n \to \infty$ 。若以極限式的寫法就是

$$\lim_{x\to\infty} a_n = \infty \tag{2.10}$$

例題 2.1.1　求極限 $\lim\limits_{n\to\infty} 7.2$。

解

這個數列爲

$$7.2,\ 7.2,\ 7.2,\ 7.2, \ldots$$

數值永遠固定，若問它趨近何值，便是 7.2。

例題 2.1.2 求極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$。

解

分母越大，整個數便越小。現在分母 n 會不斷地大下去，以致無窮。於是整個數便無止盡地小下去，趨近到 0。因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

note

此例又一次顯示，極限值與數列的取值是不一樣的概念。無論你 n 代什麼數進去，$\frac{1}{n}$ 都絕無可能是 0。

例題 2.1.3 求極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}$。

解

分母會跑到無限大，而且它還是二次方，跑得更快。然而分子卻是有限的（介於 -1 到 1 之間），所以一般項趨近到 0

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}=0$$

note

在前面的例子，極限值爲 0，但數列取值永遠不是 0。在此例中，a_n 有時會等於 0（當 n 爲 3 的倍數時）。無論數列取值是永遠不等於極限值，還是有一些會等於極限值，都有可能，畢竟兩者是不同概念。

例題 2.1.4 求極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sin(n)+3}$。

解

分母介於 2 到 4 之間，分子則是跑到無窮大。那麼很明顯，整個數就是越來越大，跑到無窮大。因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sin(n)+3}=\infty$$

■ 2.2 數列極限的性質與常見的數列極限運算

目前爲止，所介紹的數列求極限，都太簡單了，考試時九成九不會這樣考出來。接下來來介紹一些沒那麼基本的極限題型，不過在此之前，必須先介紹收斂極限式的運算律。

性質 2.2.1 收斂極限式的基本性質

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ 及 $c \in \mathbb{R}$。那麼

1. 相加 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha \pm \beta$
2. 常數倍 $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot \alpha$
3. 相乘 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha \cdot \beta$
4. 相除 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ $\boxed{\text{條件是 } \beta \neq 0}$

例題 2.2.1 求極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-4n+1}{2n+3}$。

解

當 n 趨近無窮大時，分子與分母都是趨近到無窮大，那麼結論是什麼呢？這種情況，我們姑且以 $\frac{\infty}{\infty}$ 表之。至於答案，光由表面的 $\frac{\infty}{\infty}$ 看來，暫時不知道。可能無限大，可能 0，也可能非 0 的有限數，甚至極限不存在都有可能。若不進一步分析，光由表面上的形式 $\frac{\infty}{\infty}$ 是無法得知的。

這一題我們可以這麼想：分子是趨近無窮大，它是 n 的二次式。當 n 很大的時候，看看領頭的二次項，它是很大的數乘上很大的數。然而分母的部份，它只是 n 的一次式。當 n 很大的時候，看看領頭的一次項，它是很大的數，但在分子面前，便相形失色，人家比它變大，是快得多了。因此整個極限，是趨近無窮大。

想歸想，正式作答的時候該怎麼寫呢？可以分子分母同除以 n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n+1}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-4+\cancelto{0}{\frac{1}{n}}}{2+\cancelto{0}{\frac{3}{n}}}$$

這樣可以看出，分子是趨近無窮大，然而分母是趨近到 2，因此此數列趨近無窮大。

亦可改同除以 n^2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n+1}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\cancelto{0}{\frac{4}{n}}+\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}}}{\cancelto{0}{\frac{2}{n}}+\cancelto{0}{\frac{3}{n^2}}}$$

這樣同樣可以得到數列值趨近到無窮大的結論。

例題 2.2.2 求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-7n+4}{n^3-5n+3}$。

解

此題同樣是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的形式。分子的次方是 2，分母的次方是 3。因為現在 n 是趨近於無限大，那麼 $n^2=n\times n$ 就會遠遠大於 n；$n^3=n\times n^2$ 就會遠遠大於 n^2。所以此題雖然分母與分子都會趨近於無限大，但顯然可見的是，分母會比分子還要大地多，因此此題極限值是 0。

正式在答題的時候你可以這麼做：將分子分母同除以 n^3，那將得到

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{7}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{1-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}\\ =&\frac{\lim\frac{1}{n}-\lim\frac{7}{n^2}+\lim\frac{4}{n^3}}{\lim 1-\lim\frac{5}{n}+\lim\frac{3}{n^2}}\\ =&\frac{0+0+0}{1+0+0}=0\end{aligned}$$

實際上可以不寫出第二行來沒關係，我只是先詳細寫出來給你看。

例題 2.2.3 求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$。

解

上下同除以 5^n

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^n}_{\to 0}+\underbrace{\left(\frac{4}{5}\right)^n}_{\to 0}}{\underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)^n}_{\to 0}+1}=0$$

原則一樣是在眾多項趨近無限大中抓較大的來同除。

例題 2.2.4 求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^n+4^n+5^n\right)^{\frac{1}{n}}$。

解

此題為 ∞^0 的形式。千萬不可以為：任何數的零次方都是 1 呀，所以答案就是 1！當我們說一個極限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 的形式時，意指分母與分子皆趨向無限大。同樣地，所謂 ∞^0 並非次方真的是 0，而是：底數趨向無限大、次方趨向 0。底數與次方賽跑，底數要跑到無限大、次方要跑到 0，看誰跑得快。如果底數跑得比次方快，結果就會趨近無限大；如果次方跑得比底數快，結果就會趨近 1；如果兩者跑得差不多快，結果就是趨近某個非零常數 C。所以請記得，∞^0 的形式亦是一種不定式。

$$\lim_{n\to\infty}\left(3^n+4^n+5^n\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \boxed{\text{將 } 5^n \text{ 拉出括號}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(5^n\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1\right]\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (5^n)^{\frac{1}{n}} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1\right)^{\frac{1}{n}} = 5\cdot(0+0+1)^0 = 5$$

例題 2.2.5 求極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-2n+3}}{n}$。

解

這裡同樣是無法一望即知極限值，須作些處置：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-2n+3}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-2n+3})\cdot(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-2n+3})}{n\cdot(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-2n+3})} \qquad \boxed{\text{反有理化}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+3n)-(n^2-2n+3)}{n(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-2n+3})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n-3}{n(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-2n+3})} \qquad \boxed{\text{同除以 } n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{3}{n}}{(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-2n+3})} = 0$$

note

遇到有根號相減，常可使用反有理化，乘完整理式子以後，便可消去 n。

2.3 夾擠定理

有時候直接將極限值求出，是不太容易的事情。以下再介紹一個有力工具，讓我們可以間接地得出極限值。

定理 2.3.1 數列版夾擠定理

若數列 $\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle,\langle c_n\rangle$ 在 $n\geq k$ （k 爲某正整數）時，恆滿足

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

則有

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

例題 2.3.1 求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$。

解

先將原式寫成

$$\frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)\times\left(\frac{3}{n}\right)\times\cdots\times\left(\frac{n-1}{n}\right)\times\left(\frac{n}{n}\right)$$

很明顯，每一個括號都小於等於 1、每一項大於等於 0。因此

$$0\le\frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)\times\left(\frac{3}{n}\right)\times\cdots\times\left(\frac{n-1}{n}\right)\times\left(\frac{n}{n}\right)\le\frac{1}{n}$$

而顯然 $\lim\limits_{n\to\infty}0=0=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$，所以由夾擠定理，我們知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$ 。

例題 2.3.2 求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100^n}{n!}$。

解

先將原式寫成

$$\left[\frac{100}{1}\times\frac{100}{2}\times\cdots\times\frac{100}{99}\right]\times\left(\frac{100}{100}\right)\times\left(\frac{100}{101}\right)\times\cdots\times\left(\frac{100}{n-1}\right)\times\frac{100}{n}$$

注意每個小括號都小於等於 1，而中括號的部份雖然很大，但也就定值 $\dfrac{100^{99}}{99!}$。所以寫

$$\frac{100^n}{n!}\le\frac{100^{99}}{99!}\times\frac{100}{n}$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100}{n}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100^n}{n!}=0$。

像這樣寫，就錯了！許多同學會這樣寫，但這並不是夾擠定理。夾擠定理須將上下界都寫出來才可以！應該改成

原數列一般項大於等於 0 雖然很理所當然，卻不能省略！

$$0\le\frac{100^n}{n!}\le\frac{100^{99}}{99!}\times\frac{100}{n}$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}0=0=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100^n}{n!}$，所以由夾擠定理，我們知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100^n}{n!}=0$。

例題 2.3.3 求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(n)}{n}$。

解

分子是有界的，介於 -1 到 1 之間。分母趨向無限大，因此一看就知道數列極限值爲 0。若要寫正式過程，可以寫

$$-1\le\sin(n)\le1\quad\Rightarrow-\frac{1}{n}\le\frac{\sin(n)}{n}\le\frac{1}{n}$$

因爲

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

所以由夾擠定理，我們知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n} = 0$$

例題 2.3.4 求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$。

解

如果將每一項都改成最小的那一項，便是下界；每一項都改成最大的那一項，便是上界。所以寫

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$$

所以由夾擠定理，我們知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

note

初學者對於這題的常見誤解是：這每一項都趨近於 0 嘛！那麼許多 0 加起來也是 0！在收斂極限式的基本性質當中，寫的是兩個收斂的數列相加後的極限，會等於各自極限值相加。雖然我們可以以此類推至三個、四個、五個收斂的數列相加，但不能隨意「類推」到無限多項相加！因爲你不知道這無限多個無窮小，會不會逐漸累積成一個可觀的數。

例如譬如說 $\lim\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}$，有 n 個 $\frac{1}{n}$，很明顯加起來是 1，所以 $\lim 1 = 1$。如果是 $\lim\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}$，有 n^2 個 $\frac{1}{n}$，加起來是 n，所以 $\lim n = \infty$。而如果是 $\lim\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$，有 n 個 $\frac{1}{n^2}$，加起來是 $\frac{1}{n}$，所以 $\lim\frac{1}{n} = 0$。所以我們的結論是：光由「無窮多項無窮小」這件事，我們看不出什麼。

2.4 重要的常數：歐拉數 e

全宇宙最重要的常數，就是自然指數的底：e。爲了介紹這個數，我們先來想一個跟存款有關的問題。假設存款的年利率 P，每半年計息一次，複利計算。那麼我放的本金 A，過了一年會變多少錢呢？年利率是 P，所以半年的利率是其一半：$\frac{P}{2}$，一年以後計

息兩次，所以本利和爲

$$A\times\left(1+\frac{P}{2}\right)^2$$

那如果是每季計息一次，季利率是 $\frac{P}{4}$，一年以後計息四次，所以本利和爲

$$A\times\left(1+\frac{P}{4}\right)^4$$

計息越多次，對我就越有利。假設我很貪心，跑去跟銀行要求，我想要每個月計息一次，那麼我一年後的本利和就是

$$A\times\left(1+\frac{P}{12}\right)^{12}$$

人心不足蛇吞象，後來我又得寸進尺地要求每天計息一次，那麼我一年後的本利和就是

$$A\times\left(1+\frac{P}{365}\right)^{365}$$

銀行實在是很好說話，還是一口就答應。如果我還是跑去要求要每十二小時計息一次、每小時計息一次、每分鐘計息一次、……那麼我的本利和會無止盡地膨脹下去嗎？換句話說，$A\times\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{P}{n}\right)^n$ 是多少？是無窮大嗎？還是有限的值？

爲了簡便，我們姑且設 $P=1$，雖然不會有人年利率是用 1[1]，但到時你就知道我們可以事後再將 P 代其它值。也就是說呢，我們目前的問題是：（將 A 也先省略）$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是多少？

千萬不要以爲：底數趨近到 1，而 1 的任何次方還是 1 。當然不是，當 $n=1$，其值就 $1+1=2$ 了。而 n 越大時其值會越大，就更不會是 1 了！這樣思考的錯誤在於：底數是「趨近 1」，而不是「定値 1」。這就有如雙方在賽跑，看誰跑得快。如果次方快得多，就會趨向無限大；如果底數跑到 1 快得多，就會趨近到 1 。如果雙方差不多快，就會跑到一個大於 1 的常數。

那麼，這個極限究竟趨近到多少呢？數學家歐拉 Euler 在他的著作中，將這個數取符號[2]爲 e 。換句話說，我們這麼定義

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

並且歐拉計算它的值精確到小數點後十八位。它的值大約是

$$e=2.718281828459045\cdots$$

由於偉大的數學家歐拉對於 e 這個數起到非常重要的推廣作用，我們也稱此數爲**歐拉數**。

那現在回到原本問題，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{P}{n}\right)^n$ 是多少呢？數學上常常是利用已知解決未知，我們已知 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，那麼 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{P}{n}\right)^n$ 就等於 e^P。這當中的推導過程，我放在本文的進階題材裡面（第100頁）。

[1]目前放一年的定期存款，年利率大約是 0.0169 左右，活期存款的年利率更是連 0.01 都不到。而股神巴菲特買股票的年化報酬率，也不過是長期平均 0.23 左右。

[2]有人說這是取他名字的第一個字母。也有人認爲 Euler 爲人這麼謙虛不會這麼做，應該是取指數 exponential 的第一個字母。

在剛剛所說的銀行存款例子中，就算我要求每秒計息、每毫秒計息，再怎麼如何得寸進尺下去，一年下來的本利和其實也不會超過 $A\times e^P$。若以目前臺灣銀行的活期儲蓄存款之年利率 $P=0.00705$ 來算，那就是

$$A\times e^{0.00705}\doteqdot A\times 1.0070749$$

嘩！這跟一年只計一次息根本差不了多少嘛[3]！

隨著年利率的不同，P 就代不同的值到 e^P。那我們可以將 P 改寫成變數 x，於是這就是**自然指數函數**e^x，歐拉數 e 就是這個自然指數函數的底。

至於其反函數[4] $\log_e x$，也是在高等數學中特別重要的函數，稱爲 **自然對數函數**，並特地記爲 $\ln x$[5]。

note

ln 是 nature log 之意。十七世紀時 Pietro Mengoli 使用拉丁文 logarithmus naturalis 來稱呼，1893 年時 Irving Stringham 使用 ln 作爲符號。

[3]這是因爲 P 實在太小了，P 越大的話差異會越大。

[4]指數函數 a^x 與對數函數 $\log_a x$ 互爲反函數。

[5]將來你上了大學，可以特別注意：除了高中時默認 $\log x$ 是以 10 爲底以外，在高等數學中就不一定。有可能 $\log x$ 也是指 $\ln x$，甚至在一些計算機領域的書當中，$\log x$ 是以 2 爲底！

看什麼看？沒看過空白頁？

This page is intentionally left blank

第 3 章

連續函數與函數的極限

只有在微積分發明之後，物理學才成爲一門科學。只有在認識到自然現象是連續的之後，構造抽象模型的努力才取得了成功。

Riemann

3.1 函數的連續性、函數極限

函數的連續性在數學上是很重要的課題，它會影響到許多性質、定理的成立，因此也是非常有必要討論的。然而函數怎麼樣叫做連續呢？且讓我們先做點直觀上的討論。

圖 (a) 看起來就連續不斷。至於圖 (b) 出現一個斷點，它在 $x=2$ 時是無定義的。所以在 $x=2$ 時不連續，在其它地方連續。圖 (c) 中在 $x=0$ 及 $x=2$ 處是有定義的，但很明顯發生斷裂，也是不連續。至於圖 (d) 在靠近 $x=0$ 時不斷來回震盪，所以也是不連續。

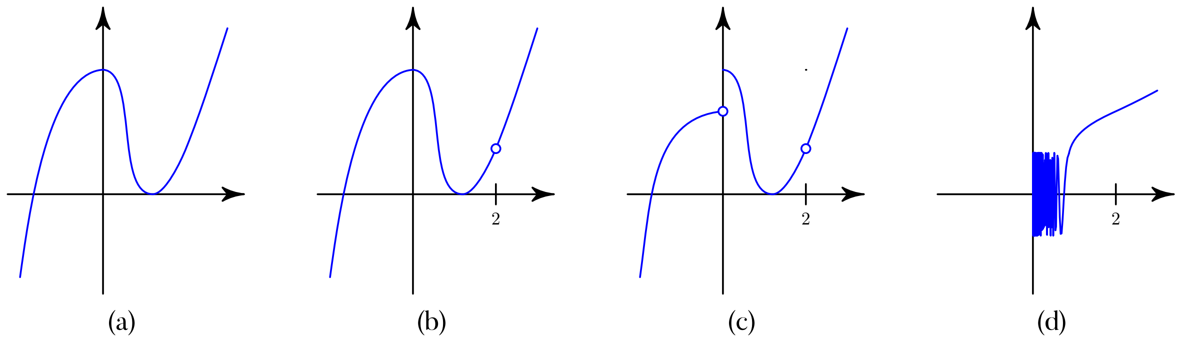


圖 3.1: 連續與否的幾種情況

看起來，連續與否似乎是能夠很直觀地去判斷的。但是學習數學，直觀雖說重要，卻不可過度依賴。數學上常常會有與直觀相悖的事實出現，或者是直觀無法完全說明的事。例如上圖(d) 或許也有人覺得看起來很連續呀，但是我覺得並不連續，那你覺得誰才是對的？或是像

$$y=\begin{cases}1 & ,x\in\mathbb{Q}\\ 0 & ,x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

有人說它處處都有斷開，所以處處不連續。也有人說因爲有理數是稠密的，所以畫出圖來後，那些 $y=1$ 應該是看起來很連續的。無理數也是稠密的，所以那些 $y=0$ 應該也都很連續呀！如果你知道他說錯了，你要怎麼反駁他呢？甚至，這些還是考慮函數圖形的情況，沒給你圖，你能幫我判斷 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}0.78^n\cos(3^n\pi x)$ 是否連續嗎？

事實上，在微積分剛發展時，由於大多時候處理的都是連續函數，所以數學家們似是不曾想過，也沒必要去在意這個問題。直到十八世紀時，開始在物理問題上出現一些不連續函數，迫使數學家們在微積分的應用上必須面對函數可能不連續的問題。爲了不訴諸直觀、造成爭議的發生，數學家們逐漸在數學中使用形式化的定義取代口語的定義。雖然形式化的定義會讓同學覺得好像很難讀，但其好處是可以幫助我們精確地下判斷。

從對於圖組 3.1 幾種情況的觀察中，我們對於連續下這樣的結論：如果函數 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 處連續，那麼首先必須函數值 $f(a)$ 是有定義的，再來是在 $x=a$ 的附近，函數值的趨勢必須是越來越靠近 $(a,f(a))$ 這個點。以上若不成立，就是不連續。如果以這個當作判斷法則，就可以正確地區分出連續與否。然而，這就牽涉到了函數極限的概念。

定義 3.1.1　函數的極限

如果函數 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 附近有定義，並且隨著 x 越來越靠近、無限地靠近 a 時，函數值 $f(x)$ 隨之越來越靠近、無限地靠近某個值 L，則稱 L 爲函數在 x 趨近到 a 時的極限。符號上可以記作：當 $x\to a$，$f(x)\to L$。或者是使用 lim 符號：

$$\lim_{x\to a}f(x)=L$$

有了極限的概念以後，現在可以正式對連續下定義。

定義 3.1.2　連續的定義

函數 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 處連續，若且唯若

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

而如果函數 $y=f(x)$ 在區間 I 上的每個點都連續，則稱 $f(x)$ 在區間 I 上連續。如果函數 $y=f(x)$ 在整個實數 $\mathbb{R}$ 上連續，則稱 $f(x)$ 處處連續（continuous everywhere）。

別小看這一條式子，表面看似一條，其實是三個條件要成立：

1. 函數值 $f(a)$ 有定義
2. 極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在
3. 上述兩者相等

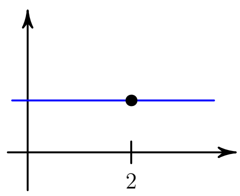
當然嘛，你要說 $A=B$，先決條件 A 和 B 要先存在，才談得上相等與否。而既然連續的條件是三者成立，那麼只要其中一個不成立，便是不連續了。例如圖(b) 中的 $x=2$ 處是函數值不存在；圖(c) 中的 $x=0$ 處函數值存在但極限不存在；圖(c) 的 $x=2$ 處則是函數值與極限都存在，但兩者不相等；至於圖(d) 的 $x=0$ 處，那也是極限不存在。

目前對於連續的定義，算是大概有點概念了，但是現在要先花時間探討函數的極限。待我們對於求函數極限更爲熟習之後，才有辦法進行關於函數連續以及其它課題的探討。

例題 3.1.1　求極限 $\lim_{x\to 2} 1$

解　常數函數 $y=1$ 是處處連續的，所以

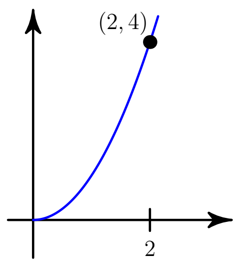
$$\lim_{x\to 2} 1=1$$



例題 3.1.2　求極限 $\lim_{x\to 2} x^2$

解　畫出拋物線 $y=x^2$，因爲拋物線處處連續，在 $x=2$ 處也連續，所以

$$\lim_{x\to 2} x^2=4$$



3.2　解析地求函數極限

目前你可能還不服氣：「你跟我說連續函數要用極限來定義，現在求極限又說因爲連續所以知道極限值！」以下介紹如何更解析地（analytically ）求極限值。不過在此之前，還須再介紹多點關於連續函數。

一旦認識連續的定義 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$，那麼做極限時只要判定函數是連續的，就可以直接代入，非常方便！哪些函數是連續的呢？基本常見的函數差不多都是連續的：

1. 冪函數 x^a $\boxed{a \text{ 可以是任意實數}}$
2. 三角函數 $\sin(x)$ 和 $\cos(x)$
3. 指數函數 a^x
4. 對數函數 $\log_a x$

再配合以下這些基本性質：

性質 3.2.1 連續函數的基本性質

若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 皆在 $x=a$ 處連續，c 爲一常數，則以下函數也在 $x=a$ 處連續：

1. $f(x)\pm g(x)$
2. $c\cdot f(x)$
3. $f(x)\cdot g(x)$
4. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\boxed{g(a)\neq 0}$
5. $f(g(x))$

有了以上這些基本性質，我們就認識了更多連續函數！

例題 3.2.1 求極限 $\lim\limits_{x\to 1} x^4-5x^3+2$

解

因爲 $y=x^4, y=x^3$ 與 $y=2$ 皆是處處連續的，所以將他們作線性組合後所得之 $y=x^4-5x^3+2$ 也是處處連續的。因此

$$\lim_{x\to 1} x^4-5x^3+2=1-5+2=-2$$

例題 3.2.2 求極限 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \tan(x)$

解

$y=\sin(x)$ 與 $y=\cos(x)$ 皆是處處連續的，相除後所得之 $y=\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ 在分母 $\cos(x)$ 不爲 0 處（$x\neq \dfrac{2k+1}{2}\pi$）都是連續的。因此

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \tan(x)=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

例題 3.2.3 求極限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

解

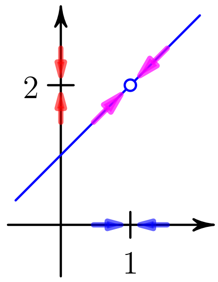
$y=x^2-1$ 與 $y=x-1$ 皆是處處連續的，相除後所得之 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在分母 $x-1$ 不爲 0 處⋯咦？題目正是問 $x\to 1$，會使分母爲 0 之處，所以現在沒辦法直接代入得到極

限值。這種情況，只好對函數作些處理：

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2-1}{x-1} && \boxed{\text{因式分解}} \\ &= \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} && \boxed{\text{如果 } x-1\neq 0\text{，就可以消去}} \\ &= x+1 \end{aligned}$$

我們得到結論，原來的函數其實就是

$$y=\begin{cases} x+1 & ,x\neq 1 \\ \text{無定義} & ,x=1 \end{cases}$$



所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+1=2$$

note

函數 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 與函數 $y=x+1$ 並不相等，前者在 $x=1$ 處無定義，後者在整個 $\mathbb{R}$ 上都有定義。當我們寫 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+1$，並不是函數相等的意思，而是極限相等。因爲我們是在處理 $x\to 1$ 時的極限，就是在看：當 x 從不是 1 的地方越來越靠近 1 時，函數值 y 是否隨之趨近到一個定值。而函數 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在 x 不是 1 時，其取值又完全等於函數 $y=x+1$，那麼 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ 就會等於 $\lim_{x\to 1}x+1$ 了。

例題 3.2.4 求極限 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+14x-51}{x^3-5x^2+4x+6}$

解

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 3}\frac{x^2+14x-51}{x^3-5x^2+4x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+17)}{\cancel{(x-3)}(x^2-2x-2)} \\ =&\lim_{x\to 3}\frac{(x+17)}{(x^2-2x-2)}=\frac{(3+17)}{(3^2-2\cdot 3-2)}=20 \end{aligned}$$

note

不必擔心因式分解的問題，一個多項式代 $x=3$ 得到 0，表示一定有 $(x-3)$ 這個因式，這是高一所學的因式定理。已知有因式 $(x-3)$ 了，剩下再做除法便可出來。

例題 3.2.5 求極限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+x}-2\right)\left(\sqrt{4+x}+2\right)}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4+x-4}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4+0}+2}=\frac{1}{4}$$

做極限遇到根號相減的不定式，通常使用反有理化。

例題 3.2.6　求極限 $\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{(x-2)^2}$

解

分母趨近 0，會無止盡地小下去。然而分子不是同時趨近 0，而是趨近 7。這種情況是函數值會無止盡地變大，所以寫

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{(x-2)^2}=\infty$$

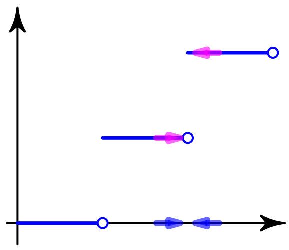
note

∞ 並不是一個數，它只是一個用以示意的符號。極限爲無限大，意指函數值會無止盡地變大，不趨向一個定值，所以是極限不存在的一種情況。

例題 3.2.7　求極限 $\lim_{x\to 2}[x]$

解

高斯函數 $y=[x]$ 長相如右圖，當 x 趨近到 2 時，函數值是否會趨向一個定值呢？仔細一瞧，當 x 由 2 的左邊趨近到 2 時，函數值是趨向 1；當 x 由 2 的右邊趨近到 2 時，函數值卻是趨向 2。這說明了，當 x 由 2 的附近趨近到 2 時，函數值並不趨向一個定值，所以此題是極限不存在。



3.3　單側極限

由上一題的討論，我們可以引進單側極限的概念，在解極限問題時是很好用的。

定義 3.3.1　單側極限

如果函數 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 的右側附近有定義，並且隨著 x 由 a 的右側無限地靠近 a 時，函數值 $f(x)$ 隨之無限地靠近某個值 L，則稱 L 爲函數在 x 趨近到 a 時的右極限。符號上可以記作：當 $x\to a^+$，$f(x)\to L$。或者是使用 lim 符號：

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=L$$

類似地可定義左極限，符號上記作

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

認識了單側極限，便可以介紹下面這個有用的性質。

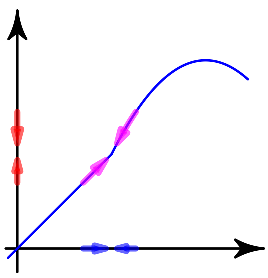
性質 3.3.1

若函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 的兩側附近有定義，則

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{若且唯若} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

例題 3.3.1 若 $f(x) = \begin{cases} x & , x \le 1 \\ -(x-2)^2+2 & , x > 1 \end{cases}$，求極限 $\lim_{x\to 1} f(x)$。

解



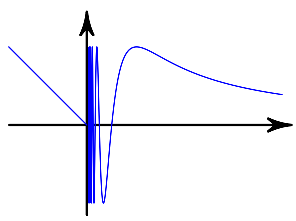
這個分段定義函數如右圖，當 x 由 1 的左邊趨近 2 時，函數值是趨向 1；當 x 由 1 的右邊趨近 2 時，函數值也是趨向 1。用剛剛介紹的性質來寫就是：因爲

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left[-(x-2)^2+2\right] = 1$$

左右極限皆存在，並且兩者相等，所以 $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$。

例題 3.3.2 若 $f(x) = \begin{cases} -x & , x \le 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x > 0 \end{cases}$，求極限 $\lim_{x\to 0} f(x)$。

解



這個分段定義函數如右圖，因爲當 x 由 0 的右邊趨近 0 時，函數值是不斷來回振盪，並不趨向一個定值的。所以右極限 $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ 不存在，從而極限 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在。

note

$f(x)$ 在 $x = a$ 左右由不同表達式來表示時，將 $\lim_{x\to a} f(x)$ 拆爲左右極限。

例題 3.3.3 求極限 $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x+6}{x-1}$。

解

乍看之下這題會想回答 $\lim_{x\to 1}\frac{2x+6}{x-1}=\infty$，但是考慮左右極限

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+6}{x-1}=\infty \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{2x+6}{x-1}=-\infty$$

兩者分別趨向正無窮大與負無窮大，不是一起趨向正無窮大，所以這題要回答極限不存在比較好。

note

趨向無限大是一種極限不存在，但極限不存在不一定是趨向無限大。

3.4 夾擠定理

在數列的極限中我們學過夾擠定理，而函數的極限同樣有夾擠定理。

定理 3.4.1 函數版夾擠定理

如果在 $x = a$ 的附近（可以不包含 $x = a$ 本身）滿足 $g(x) \le f(x) \le h(x)$，且

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

則有

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

例題 3.4.1 求極限 $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$。

解

那個 $\sin(\frac{1}{x})$ 看起來不太好處理，所以試圖找上下界來使用夾擠定理。首先因爲

$$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

所以

$$-x^2 \le x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$$

而顯然

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = 0 = \lim_{x\to 0} x^2$$

所以由夾擠定理，我們知道

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

note

那個麻煩的 $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$，助我們想到夾擠定理。直接處理原極限式是不可行的，但估個上下界以後，上下界並不含 $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ，便容易處理了。

例題 3.4.2 求極限 $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 。

解

仿照上題，因爲

$$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

所以

$$-|x| \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le |x|$$

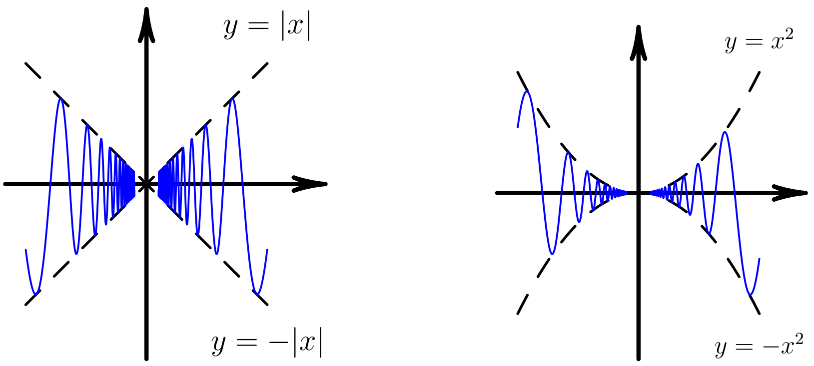
而顯然

$$\lim_{x\to 0} -|x| = 0 = \lim_{x\to 0} |x|$$

這裡要注意的是必須加絕對值，因爲 x 會正負兩側趨向 0 。

所以由夾擠定理，我們知道

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$



(a) $y = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (b) $y = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

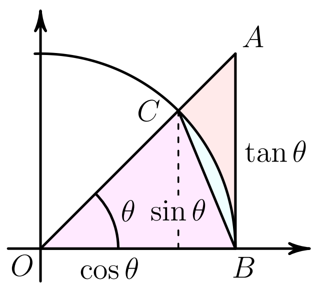
圖 3.2: 夾擠

夾擠定理可以用來推導出一個極限。

例題 3.4.3 求極限 $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin(\theta)}{\theta}$ 。

解

在圖中，顯然三角形 OBA 面積大於扇形 OBC 面積大於三角形 OBC 面積。所以寫



$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin\theta \le \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta \le \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta$$

作約分並同除以 $\sin\theta$，得到

$$1 \le \frac{\theta}{\sin\theta} \le \frac{1}{\cos\theta} \quad \Rightarrow 1 \ge \frac{\sin\theta}{\theta} \ge \cos\theta$$

顯然

$$\lim_{\theta\to 0} 1 = 1 = \lim_{\theta\to 0}\cos\theta$$

所以由夾擠定理，就有

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$$

請注意：按照 108 課綱的敘述看來，上述過程只是作爲夾擠定理的一個應用，作爲高中生的你只要看懂即可。但將來學習大一微積分的時候，你就必須把這個固定套路記起來了！說白了就是考試會直接這樣考。

第 4 章

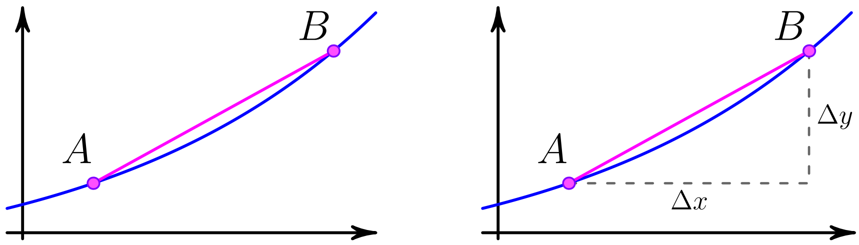
微分學

微積分是精確的計算和度量某種無從想象其存在的東西的藝術。

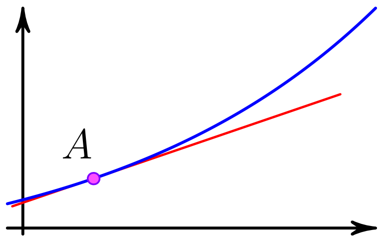
伏爾泰

4.1 導數的定義

在一條曲線 $y = f(x)$ 上取 A、B 兩點，並且拉出線段 $\overline{AB}$，這條線便叫**割線**。如果想求割線的斜率，這是很容易的。只須拉出水平變化 Δx 和鉛直變化 Δy，再相除後得到 $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



如果是切線呢？有沒有辦法求出它的斜率？如下圖是以 A 點爲切點的切線：



像這種問題，是有其具體意義的，並非只是數學家單純想要在幾何問題上求知。在牛頓發展微分學的時候，他主要是想解決運動學上的問題。如果你把以上的圖想成是 $s-t$ 圖，也就是說，圖中的函數代表著位置函數。橫軸改看成 t 軸，代表時間 t（time）；縱軸改看成 s 軸，代表物體的位置。那麼，A 點代表在某個時間，物體在某一個位置；B 點代表另一個時間，物體在另一個位置。當我們拉出割線，並求出斜率 $m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$。用位置變化（位移）除以時間變化，求出來的東西就是平均速度。

舉個比喻，你從嘉義開車到台南[1]，速度時快時慢。而如果你直接把開車的起點和終點拉出距離，再除以開車時間，求出來的就是平均速度。平均速度只不過是平均而言，並不代表每個當下都是這個速度。當你開車時一邊注意儀表板，就會看到每個當下的瞬時速度。

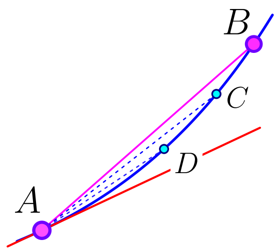
那如果沒有儀表板怎麼辦呢？如何從 $s-t$ 圖中看出瞬時速度呢？就是求切線斜率！$s-t$ 圖中的割線斜率代表平均速度；切線斜率代表瞬時速度。

如果再講得更一般一點，這是變化率的問題！平均斜率 $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，這是 y 方向的變化除以 x 方向的變化。這就是一種變化率，y 對 x 的變化率。平均而言，x 每增加 1 單位，y 會增加 m 單位。至於切線斜率，就是在那一瞬間的 y 對 x 變化率。而就運動學上來說，所謂速度其實就是位置對時間的變化率，位置變化除以時間變化。你也可以套在人口成長的模型上，假設人口函數 $P(t)$，那麼你在圖上拉割線斜率，就是人口對時間的變化率，也就是人口增長率。

介紹完求切線斜率的動機，我們來看看切線斜率究竟要如何求出。如果我們在 A 和 B 之間，多標幾個點，並且也都與 A 拉割線。可以看出，越靠近 A 的點，拉出來的割線越接近切線。

[1]我們假設一路上都是直線開的，以避免探討速度的方向性問題。

我們觀察到：如果讓動點 P 越來越靠近 A 點，它拉到 A 點的割線就會越來越接近以 A 爲切點的切線。於是我們寫：

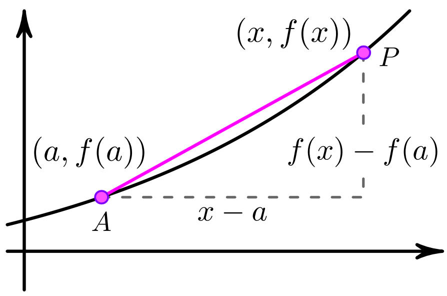


$$\lim_{P\to A}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

這樣寫的意思是，看動點 P 趨近到 A 時，割線斜率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 會趨近到何值。這樣子求出來的極限，便是切線斜率了！

微分學，就是起源於求切線斜率。這個在 A 點的切線斜率，正式地說，我們稱之爲：函數 $y=f(x)$ 在 A 點的**導數**（derivative）。

光是看符號，是沒辦法實際動手求出導數的，現在來給你導數的定義。首先設 A 點的 x 座標爲 a，至於 y 座標，就寫 $f(a)$ [2]。至於動點 P，就設爲 $(x,f(x))$。這兩個點都設完座標以後，便可寫下



$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

這是割線斜率。接著照我們剛剛所說的，使動點 P 趨近到 A 點

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

這樣求出來的極限值，就會是切線斜率了！

定義 4.1.1　導數的定義

函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的切線斜率，稱爲 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數。其定義爲

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

例題 4.1.1　求 $y=x^2$ 在 $x=3$ 處的導數。

解

套用導數的定義

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

寫下

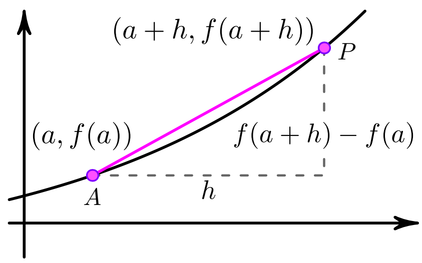
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3^2}{x-3}$$

$y=f(x)=x^2$，而 $f(3)$ 就是把 3 代進去得到 3^2。接著因式分解，再上下約分便有

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

所以 $y=x^2$ 在 $x=3$ 處的導數就是 6。換句話說，$y=x^2$ 在 $x=3$ 處的切線斜率爲 6。

[2] $y=f(x)$，將 $x=a$ 代入。



導數的定義，也有另一種形式。只要我們對動點 P 的表示方式稍作修改，由 x 改爲 $a+h$，這個 h 其實就是 Δx 的意思。

此種情況之下，導數的定義

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

定義 4.1.2 導數的定義

函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的切線斜率，稱爲 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數。其定義爲

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

爲什麼要多寫另外一種形式？這是因爲針對不同的 $y=f(x)$，我們可以選擇會讓我們比較好做的形式。

例題 4.1.2 求 $y=x^2+2$ 在 $x=-1$、$x=2$、$x=3$ 處的導數。

解

在 $x=-1$ 處

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[(-1+h)^2+2\right]-\left[(-1)^2+2\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0}h-2=-2$$

在 $x=2$ 處

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[(2+h)^2+2\right]-\left[2^2+2\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}h+4=4$$

在 $x=3$ 處

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[(3+h)^2+2\right]-\left[3^2+2\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+6h}{h}=\lim_{h\to 0}h+6=6$$

在上一題中，我們將不同處的導數都一一寫出。可以發現，計算過程的重複性實在太高了，寫起來有點累。其實如果我們將導數定義中的 a，暫且改寫成 x，做出來的東西再去代 $-1,2,3$，便會省事得多。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ \to\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

拿上一題來實際操作一次。$y=x^2+2$，寫下

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^2+2\right]-\left[x^2+2\right]}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh}{h}=\lim_{h\to 0}h+2x=2x\end{aligned}$$

接著再分別代入 $x=-1,2,3$，便可以得到 $-2,4,6$。這樣做是不是省事多了呢？

我們先將函數 $y=x^2+2$ 套在 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 做出另一個函數 $y=2x$，接著再代點。我們稱 $y=2x$ 這個函數爲 $y=x^2+2$ 的**導函數** (derived function)，其意義就好像「切線斜率函數」。想知道函數 $y=x^2+2$ 在 $x=a$ 處的切線斜率？那就將 $x=a$ 代入「切線斜率函數」！至於 $y=x^2+2$，我們可以說它是 $y=2x$ 的 **原函數** (primitive function)，或是稱之爲反導函數 (antiderivative)。將原函數 $y=x^2+2$ 求導，得到導函數 $y=2x$。

同學常常搞不清楚導數和導函數有什麼分別。導數是一個數值，意義是切線斜率；導函數是一個函數，意義上來說可稱之「切線斜率函數」。如果我們想求函數 $y=x^2+2$ 在 $x=2$ 處的切線斜率，那就是求函數 $y=x^2+2$ 在 $x=2$ 處的導數。我們可以先求出它的導函數 $y=2x$，再代入 $x=2$，得到 4，便得到我們要的導數。不過，有時還是會將「導函數」簡稱爲「導數」，或許這種簡稱方式是害初學者搞混的原因吧！

至於求出導函數這個動作，則叫**求導** （differientiate)，我們也常稱之爲「微分」。不過，「微分」這個詞，在中文口語中實在有點用途太廣：求導這個動作，我們可以說是微分，將 $y=x^2+2$ 微分後得到導函數 $y=2x$；我們也會將導函數說是微分，$y=x^2+2$ 的微分是 $y=2x$；還會把導數說是微分，$y=x^2+2$ 在 $x=2$ 處的微分是 4；甚至，還有另一個概念，英文叫 differential，中文也叫微分！這個概念會出現在大一微積分。由於中文不分詞性，當你說「微分」的時候，我們須藉由上下文，來得知你意指爲何。

接下來介紹符號。符號的使用在數學發展上扮演著非常重要的角色。好的符號可以讓我們更方便、更容易地去表達、理解、進行操作。舉個例子來說吧，下圖是元代數學家李治，在其著作《測圓海鏡》中進行幾何的解題。大約清末民初以後，數學就全面西化，不再使用古代數學的表示法了，是否覺得慶幸我們不必學習這種面貌的數學呢？

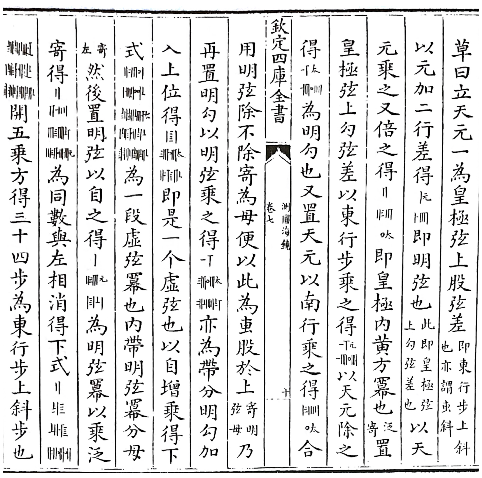

草曰立天元一為皇極弦上股弦差即東行步上斜
以元加二行差得即明弦也此即皇極弦上勾弦差也亦謂虛斜以天
元乘之又倍之得即皇極內黃方冪也寄左置
皇極弦上勾弦差以東行步乘之得以天元除之
得為明勾也又置天元以南行乘之得合
欽定四庫全書　測圓海鏡　卷七
用明弦除不除寄為母便以此為東股於上寄明弦為母乃
再置明勾以明弦乘之得亦為帶分明勾加
入上位得即是一个虛弦也以自增乘得下
式為一段虛弦冪也內帶明弦冪分母
寄左然後置明弦以自之得為明弦冪以乘泛
寄得為同數與左相消得下式
開五乘方得三十四步為東行步上斜步也

圖 4.1: 李治《測圓海鏡》

在微積分的發展歷史上，雖然因牛頓的名氣比較大，導致許多不了解的人偏向歸功於牛頓而非萊布尼茲。但是論到微積分上所用的符號，萊布尼茲所使用的符號卻遠優於牛頓的符號，相當好用。在十七世紀末，牛頓與萊布尼茲分別發表微積分的想法時，當時英國由於對於牛頓的盲目崇拜，使他們有好一段時間堅持使用牛頓的符號，這竟使得英國數學落後歐洲大陸一大截。等到十九世紀初英國人才開始醒過來，引入萊布尼茲符號。

$y=f(x)$，它的導函數，牛頓記爲 $\dot{y}$，在 y 的上面標一點。然而這樣的表示法，在我們現代的數學較少使用！後來十八世紀的法國數學家拉格朗日 (Lagrange)，他使用的符號是 $f'(x)$，在右上加一撇。這一撇也可以加在 y 的右上，記爲 y'。至於萊布尼茲，他是將無窮小的 Δx 記爲 $\mathrm{d}x$、無窮小的 Δy 記爲 $\mathrm{d}y$。這是取拉丁文中的「差」differentia 第一個字母 d 。而 d 對應到希臘文，是 δ，δ 的大寫是 Δ。Δx 和 $\mathrm{d}x$ 都是表達 x 的差，其間區

別是後者是無窮小的差。而切線斜率，就是先寫出割線斜率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，再讓 Δx 趨近到 0，從而 Δy 也會同時趨近到 0。於是就寫成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$！我們可以這樣想：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

你看這樣的符號，是否能幫助提醒你切線斜率是拿割線斜率取極限呢？往後我們還會繼續看到萊布尼茲符號的好處！

定義 4.1.3　導函數的定義

函數 $y = f(x)$ 的導函數 $f'(x)$，也可記爲 y' 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。其定義爲

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

例題 4.1.3 若 $y = x^3 + x^2$，求 y'。

解

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left[(x+h)^3 + (x+h)^2\right] - \left[x^3 + x^2\right]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2xh + h^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h = 3x^2 + 2x$$

$y = x^3 + x^2$ 的導函數 $y' = 3x^2 + 2x$。

例題 4.1.4 已知 $f'(0) = -1$，求極限 $\lim_{h \to 0} \frac{f(3h) - f(-2h)}{h}$。

此題不適用羅必達法則，參考本文 10.3.2

解

由導數定義，$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1$。即使 h 前面有係數，也只要變數代換就處理掉了：$\lim_{h \to 0} \frac{f(k \cdot h) - f(0)}{k \cdot h} = \lim_{y \to 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = -1$。所以將眼前問題拆解成

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3h) - f(-2h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\big(f(3h) - f(0)\big) - \big(f(-2h) - f(0)\big)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(3h) - f(0)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(-2h) - f(0)}{h}$$

對齊係數

$$= 3 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(3h) - f(0)}{3h} + 2 \cdot \frac{\big(f(-2h) - f(0)\big)}{-2h}$$
$$= 3 \cdot f'(0) + 2 \cdot f'(0) = -5$$

4.2 導數的基本性質

微分是用極限來定義的，所以目前爲此，凡是我們想要做微分，就動手求極限問題。如果極限存在，做出來的結果就是導數或者導函數。

但是有一個問題，極限不見得都存在呀，極限如果不存在怎麼辦呢？不須想破頭另闢它徑，如果該極限是不存在的，我們就說它不可導，也就是說曲線在該點沒有切線斜率可言。

一開始探討切線斜率時，我們傾向把曲線想得很平滑，就覺得好像一定會有切線，用割線逼近切線好像一定是行得通的。事實上曲線千千萬萬種，絕大部份的曲線都長得很奇怪，以致於沒有切線是很常見的。你聽了也不用太驚恐，雖然現實世界有各種奇奇怪怪的函數，但會放在微積分課程中的，已經相對來說最簡單、最好處理的。例如 $y=|x|$，這條曲線在 $x=0$ 處，是沒有切線可言的。

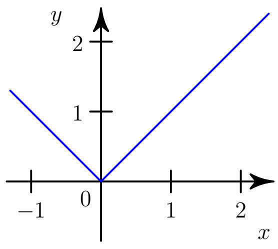


圖 4.2: $y=|x|$

定義 4.2.1 導數的定義

函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的切線斜率，稱爲 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數。符號上可記 $f'(a)$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}$。其定義爲

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

並稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微（或可導）。但此極限若不存在，則稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處不可微（或不可導）。

回到 $y=|x|$ 的例子，我們要怎麼確定它在 $x=0$ 處沒有切線呢？就是把這個極限做一次，極限不存在就是不可導啦！雖然看圖是還蠻明顯的，但是數學常常發生事實與直觀相悖的情況，我們在處理數學問題的時候不可以過度仰賴直觀。而且，有時圖只要複雜一點點，可能每個人的直觀就不盡相同。甚至，題目只給你函數而沒給你圖，你還要去自己畫嗎？不可能吧！莫說你不見得會畫，你如果會畫，不正是對它有一定的了解才畫得出來嗎？[3] 換句話說，如果你不知道它可不可以微分，那你如何把它畫得像可微或不可微的特性呢？最保險的作法是，我們一律套用定義來檢查，以確知究竟可導與否。

例題 4.2.1 函數 $y=|x|$ 在 $x=0$ 處是否可導？

解

首先將 $y=|x|$ 套入導數的定義，得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|0|}{h}$$

爲了拆絕對值，分別考慮左右極限。右極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1$$

由此題可見，確實可以用做極限的方式來論證函數不可導。

[3] 在大一微積分課程中將學到，利用求極限、微分等等諸多手法，來協助手繪函數圖。所以，若非函數本身太簡單，用畫圖來判斷可微與否，是很詭異的。

左極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h}=-1$$

左右極限的值並不相等，所以此極限不存在，也就是函數 $y=|x|$ 在 $x=0$ 處不可導。

定理 4.2.1　可導必連續

如果函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可導，則它在 $x=a$ 處連續。

證

函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可導，則有 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在。於是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}f(x)&=\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)+f(a)\right]\\&=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right]+f(a)\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)+f(a)=f'(a)\cdot 0+f(a)=f(a)\end{aligned}$$

極限值 等於函數值，所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續。 ■

note

若 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 不存在，則 $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right]=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim\limits_{x\to a}(x-a)$ 不成立。可導之所以保證連續，關鍵就在於這個等式。反過來說，連續不一定可導，前述之 $y=|x|$ 即爲一例。

例題 4.2.2　函數 $f(x)=\begin{cases}1 & ,x<0\\ x & ,x\geq 0\end{cases}$，$f(x)$ 在 $x=0$ 處是否可導？

解

$f(x)$ 在 $x=0$ 處不連續，所以不可導。

在數學上，我們喜歡化繁爲簡。對於比較難的問題，先從最基本情況討論起，接著逐步構造出一些基本性質，慢慢地搭築起困難問題與簡單問題之間的橋樑，以便用已知解決未知。目前爲止，我們用求極限的方式來判定是否可導、可導的話導數爲何值，或導函數爲何。所以，現在將探討一些基本性質與簡單的函數求導。學習了這些以後，求導將會更省力！

性質 4.2.1　微分的基本性質

若函數 $f(x)$、$g(x)$ 可導，c、d 爲實數。則

1. $\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot f'(x)$
2. $\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$
3. 積法則 product rule　　$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

4. 倒數法則 reciprocal rule $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

5. 商法則 quotient rule $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

證

1. $\left(c \cdot f(x)\right)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c\cdot f(x+h) - c\cdot f(x)}{h} = c \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c\cdot f'(x)$

note
導數是用極限定的，極限內 c 可以拉到外面，導數內 c 也可拉到外面。

2. $$\begin{aligned}\left(f(x)\pm g(x)\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\pm g(x+h) - \left(f(x)\pm g(x)\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)\pm g'(x)\end{aligned}$$

note
導數是用極限定的，極限內加減可以提到極限外，導數內加減也可提到外面。

3. $$\begin{aligned}\left(f(x)\cdot g(x)\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h) + f(x)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x)\cdot g'(x) \\ &= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\end{aligned}$$

note
1. 使用無中生有法，自己一加一減，目的是為了如下一行所示，湊出導數定義的極限式。
2. $g(x)$ 可導，所以連續，因此極限值等於函數值，才會有 $\lim g(x+h) = g(x)$。這個認知很重要，千萬不要養成做極限就亂代入的壞習慣！

4. $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(x+h)}{f(x+h)f(x)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(x+h)}{h}}{f(x+h)f(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

5. 數學上常常在做，用已知解決未知。現在已經證明完積法則還有倒數法則，對於商法則就不再費力套入極限慢慢搞。相減其實是一種相加（加負號）；相除其實是一種相乘（乘其倒數）。所以寫 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right) + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right)$ 再通分卽可得 $\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$。 ■

note

無中生有法以及 用已知解決未知的精神，請學習起來。

性質 4.2.2 常數函數的導函數爲 0

若 $f(x)$ 爲常數函數，即 $f(x)=c$，則導函數 $f'(x)=0$。

這個性質用想的也知道。導數是瞬時變化率，函數值既不變，變化率當然是 0！要用導數定義去驗證亦不困難：

證

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

■

性質 4.2.3

若函數 $f(x)=x$，則導函數 $f'(x)=1$。

證

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

■

直線 $y=ax+b$ 的斜率爲 a。任意取其中一點作切線，則所謂切線就是直線 $y=ax+b$ 自己，所以切線斜率就是 a。依我們目前所介紹的性質，可以將這件事用微分寫出來

$$(ax+b)'=\underbrace{(ax)'+b'}_{(f+g)'=f'+g'}=\underbrace{ax'}_{(cf)'=cf'}+0=a\cdot\underbrace{1}_{x'=1}=a$$

性質 4.2.4

若函數 $f(x)=x^2$，則導函數 $f'(x)=2x$。

證

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h=2x\end{aligned}$$

■

例題 4.2.3 函數 $y=3x^2-5x+9$，求其導函數 y'。

解

$$\begin{aligned} y' &= (3x^2-5x+9)' = (3x^2)' - (5x) + 9 \\ &= 3(x^2)' - 5x' + 0 = 3\cdot 2x - 5\cdot 1 = 6x-5 \end{aligned}$$

微分的基本性質是這麼好用，使我們只要事先討論過 $y=x^2,\ y=x,\ y=c$ 分別的求導公式，就可以快速地求任意二次式的導函數，而不必慢慢地套導數定義、求極限。以下探討一般正整數次方的情況。

性質 4.2.5

若函數 $f(x)=x^n, n=0,1,2,\cdots$，則導函數 $f'(x)=nx^{n-1}$。

證

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\big(\cancel{(x+h)-x}\big)\big((x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\big)}{\cancel{h}} \\ &= \lim_{h\to 0}\big((x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\big) \\ &= \underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{\text{一共 } n \text{ 個}} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

亦可使用二項式定理來展開 $(x+h)^n$

■

note

這裡的關鍵是 $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$。設定 $a=x+h,\ b=x$，就能得到第二行。以下還會不斷地利用到此式，不再一一提醒，請用心體會。

如此一來，不管幾次多項式，都有求導公式了！

例題 4.2.4 函數 $y=2x^5-8x^3+4x^2-\pi x+6$，求其導函數 y'。

解

$$y' = (2x^5)'-(8x^3)'+(4x^2)'-(\pi x)'+6' = 10x^4-24x^2+8x-\pi$$

熟練時可直接寫結果，不必寫出中間的式子。

我們現在有求導公式可套用，可立即作出 $(x^5)'=5x^4$。如果將它拆成 $x^5=x^2\cdot x^3$，可使用積法則，寫

$$(x^2\cdot x^3)' = (x^2)'\cdot x^3 + x^2\cdot(x^3)' = 2x^4+3x^4 = 5x^4$$

或是寫成

$$(x^5)' = \left(\frac{x^7}{x^2}\right)' = \frac{7x^6\cdot x^2 - x^7\cdot(2x)}{(x^2)^2} = 5x^4$$

無論什麼方式，結果必然相同。而我眞正要表達的是，雖然這例子看起來，用別的方式來寫，是把問題複雜化了，但我們有時要求導時，可先將式子作一番整理，以簡化之後的微分運算。具體例子，請看以下演示。

例題 4.2.5 函數 $y=\frac{x+3}{x+1}$，求其導函數 y'。

解

先寫

$$\frac{x+3}{x+1}=1+\frac{2}{x+1}$$

這樣可以稍簡化後面的微分運算。因爲前項是常數，微分是 0；後項的分子是常數，所以後項只須套用倒數法則，算起來會比使用商法則來得簡略些：

$$\left(1+\frac{2}{x+1}\right)'=\frac{-2}{(x+1)^2}$$

例題 4.2.6 函數 $y=\frac{x^2+3x-1}{x+1}$，求其導函數 y'。

解

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2+3x-1}{x+1}\right)'&=\left(\frac{(x+1)(x+2)-3}{x+1}\right)'\\&=\left(x+2-\frac{3}{x+1}\right)'=1+\frac{3}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}x+2\\x+1\,\overline{\smash{)}\,x^2+3x-1}\\\underline{-x^2\quad-x}\\2x-1\\\underline{-2x-2}\\-3\end{array}$$

目前我們會做 x 的非負整數次方的導函數，那如果是其它次方呢？讓我們來寫寫看。

性質 4.2.6

若函數 $y=\frac{1}{x}$，則導函數 $y'=-\frac{1}{x^2}$。

證

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(x+h)x}=-\lim_{h\to0}\frac{1}{(x+h)x}=-\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

■

性質 4.2.7

若函數 $y=\frac{1}{x^2}$，則導函數 $y'=-\frac{2}{x^3}$。

證

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-2x\cancel{h}-h^{\cancel{2}}}{x^2(x+h)^2}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}\frac{-2x}{x^2(x+h)^2} = \frac{-2}{x^3}$$

■

目前看來，當 $n=-1,-2$ 時，似乎也能滿足 $(x^n)'=nx^{n-1}$ 的規律。是否其它負整數次方也都符合呢？做做看就知道了。

性質 4.2.8

若函數 $y=x^{-n}, n\in\mathbb{N}$，則導函數 $y'=-nx^{-n-1}$。

證

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^n}-\frac{1}{x^n}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^n-(x+h)^n}{x^n(x+h)^n}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}(x^{n-1}+x^{n-2}(x+h)+\cdots+(x+h)^{n-1})}{\cancel{h}x^n(x+h)^n} = \frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = nx^{-n-1}$$

■

至此，凡是 x 的整數次方，都有 $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$。且讓我們再進一步想，如果次方的部分不是整數，會不會也成立呢？是的話就太方便了！首先探討有理數次方，第一步先討論 $y=\sqrt{x}$ 暖暖身。

性質 4.2.9

若函數 $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$，則導函數 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$。

證

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

■

性質 4.2.10

若函數 $y=x^{\frac{1}{m}},\ m\in\mathbb{N}$，則導函數 $y'=\dfrac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$。

證

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{m}}-x^{\frac{1}{m}}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left((x+h)^{\frac{1}{m}}-x^{\frac{1}{m}}\right)\left((x+h)^{\frac{m-1}{m}}+(x+h)^{\frac{m-2}{m}}x^{\frac{1}{m}}+\cdots+x^{\frac{m-1}{m}}\right)}{h\left((x+h)^{\frac{m-1}{m}}+(x+h)^{\frac{m-2}{m}}x^{\frac{1}{m}}+\cdots+x^{\frac{m-1}{m}}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{(x+h)-x}}{\cancel{h}\left((x+h)^{\frac{m-1}{m}}+(x+h)^{\frac{m-2}{m}}x^{\frac{1}{m}}+\cdots+x^{\frac{m-1}{m}}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\left((x+h)^{\frac{m-1}{m}}+(x+h)^{\frac{m-2}{m}}x^{\frac{1}{m}}+\cdots+x^{\frac{m-1}{m}}\right)}\\
&= \frac{1}{mx^{\frac{m-1}{m}}}=\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}
\end{aligned}
$$

■

目前爲止，雖然隨著函數長相越來越複雜，套用導數定義的過程也隨之越繁。但可以觀察出，求極限時所用之技巧大同小異。目前對於求導公式 $(x^n)'=nx^{n-1}$，我們已經辛苦地做出：當次方是整數及正整數的倒數，都是成立的。實際上，次方爲任何實數，此規則都成立。但是現在就此打住，如果要繼續往下做，過程是越加繁雜。

性質 4.2.11　冪函數的求導公式

若函數 $y=x^n,\ n\in\mathbb{R}$，則導函數 $y'=nx^{n-1}$。

其實，以上並非純粹進行推導，否則數學歸納法可以更快推出。之所以這樣花費許多篇幅，一方面是作爲求極限練習，另外也是爲了要強調：所謂求導公式，是我們事先由導數定義推出來的。許多同學學了一點皮毛，覺得：微分很簡單嘛！不就次方往下掉、次方減 1 嗎？其實那只適用冪函數 x^n 的形式：底數是變數，次方是固定的數。若非此形式，例如指對數、三角函數，便不適用！許多修習大一微積分的同學將 $(x^x)'$ 寫成 $x\cdot x^{x-1}$，這便是亂套求導公式！除此之外，例如分段定義函數，我們在交界處必須用導數定義，不能直接套用求導公式！所以，導數定義是學習微積分本來就必須掌握的技能，並不是我強迫你在進行無趣的理論推導！以下例子，使用導數定義來求導，可大大簡化計算過程。

例題 4.2.7　函數 $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+2024)}$，求 $f'(0)$。

解

若是先求導函數再代值，套用商法則，那就恐怖了。應該直接使用導數定義

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\cancel{h}}{(h+1)(h+2)\cdots(h+2024)}-0}{\cancel{h}}\\
&= \frac{1}{1\times 2\times\cdots\times 2024}=\frac{1}{2024!}
\end{aligned}
$$

■ 4.3　高階導數

微分是一種瞬時變化率的概念。例如在物理的運動學中，考慮位置的變化率，就是速度。而如果進一步考慮速度的變化率，就是加速度。這也就是說，我們有求出「導函數的導函數」的實際需求。如果 $S(t)$ 是一個位置函數，則其導函數 $v(t)=S'(t)$ 就是速度函數。而速度函數的導函數 $a(t)=v'(t)$，即是加速度函數。

定義 4.3.1　二階導函數

若 $g(x)$ 爲 $f(x)$ 的導函數，即 $f'(x)=g(x)$，且 $h(x)$ 爲 $g(x)$ 的導函數，即 $g'(x)=h(x)$，則稱 $h(x)$ 爲 $f(x)$ 的二階導函數。符號上記作 $h(x)=\left(f'(x)\right)'=f''(x)$，或者 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

初學者對於二階導函數的萊布尼茲記號 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 較易感到困惑。在一階導函數的記號 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 中，我們可以視之爲 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y$。就是說，有一個運算子 (operator) 作用在 y 上面，這是一個微分運算子 (differential operator)。例如要對 x^4-5x^2+2x+3 求導，可以寫成 $(x^4-5x^2+2x+3)'=4x^3-10x+2$，也可寫成 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4-5x^2+2x+3)=4x^3-10x+2$。二階導函數就是對一階導函數再求導的結果，所以是 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

以此類推，又可以繼續寫更高階的導函數，符號整理如下：

一階導函數	y'	$f'(x)$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$	D_xy	$D_xf(x)$
二階導函數	y''	$f''(x)$	$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$	$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)$	D_x^2y	$D_x^2f(x)$
三階導函數	y'''	$f'''(x)$	$\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$	$\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}f(x)$	D_x^3y	$D_x^3f(x)$
四階導函數	$y^{(4)}$	$f^{(4)}(x)$	$\dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}$	$\dfrac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}f(x)$	D_x^4y	$D_x^4f(x)$
$\vdots$						
n 階導函數	$y^{(n)}$	$f^{(n)}(x)$	$\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$	$\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x)$	D_x^ny	$D_x^nf(x)$

例題 4.3.1 函數 $y=f(x)=x^5-3x^4+2x^3-7x^2+x+\pi$，求 $f(x)$ 的三階導函數。

解

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=5x^4-12x^3+6x^2-14x+1$$
$$f''(x)=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=20x^3-36x^2+12x-14$$
$$f'''(x)=\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=60x^2-72x+12$$

4.4 鏈鎖律

有些長得比較複雜一點的函數，譬如說 $(3x-1)^{12}$、$\sqrt{x^2+1}$，該怎麼求導函數呢？這種函數是**合成函數**，我們這裡就要專門討論處理它的方式：**鏈鎖律**。

定理 4.4.1 鏈鎖律

若 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 皆是可導函數，則合成函數 $y=f\big(g(x)\big)$ 也可導，並且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f\big(g(x)\big)\Big]=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

其中 $f'(g(x))$ 的意思是：將外層的 f 求導完之後，裡面要代 $g(x)$，而非 x。

例題 4.4.1 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x-1)^{12}$

解

外函數是 $f(x)=x^{12}$，$f'(x)=12x^{11}$；內函數 $g(x)=3x-1$，$g'(x)=3$。所求為

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\big(g(x)\big)&=f'(g(x))\cdot g'(x)\\&=12(3x-1)^{11}\cdot 3 \qquad \boxed{\text{不是 } 12x^{11}}\\&=36(3x-1)^{11}\end{aligned}$$

例題 4.4.2 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x)^{2024}$

解

考試答題時沒有必要像上一題這樣的完整過程，只要熟悉（包含你能熟練的判

斷內、外)，完全可以直接寫：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x)^{2024}=2024(1-x)^{2023}\cdot(-1)$$

鏈鎖律並沒有什麼困難的，同學會發生的問題主要就是沒做熟。經常外層求導完了忘了內層也要求導，或是外層求導時忘了裡面要代 $u=g(x)$，代成 x。

以上差不多就是 108 課綱鏈鎖律的內容。108 課綱提到：「以多項式函數爲主要操作對象，鏈鎖律以 $(x-a)^n$ 的微分爲主，勿多做其它變化與延伸。」 因此可想而知，你平時會在各種講義、段考、模考看見一些複雜的鏈鎖律，但大考不會那麼複雜。

不過，我個人倒是很懷疑大考中心文件是不是把 $(ax+b)^n$ 誤植爲 $(x-a)^n$。畢竟 $(x-a)^n$ 求導也就 $n(x-a)^{n-1}$，除了這樣有學沒學鏈鎖律幾乎沒區別之外，我覺得更可怕的是：大一學生本來就容易忘記乘上內函數求導，要是局限在 $(x-a)^n$ 求導而非 $(ax+b)^n$，豈不是更強化了這種容易犯錯的傾向？

下面的例題則是進一步補充的鏈鎖律例題。

例題 4.4.3 $\sqrt{x^2+1}$

錯解 1 ⚠

外層 $\sqrt{x}$ 求導後變成 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，內層 x^2+1 求導後是 $2x$，所以答案是 $\dfrac{2x}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}$ 。

錯解 2 ⚠

求導外層，內層照代 x^2+1，得到 $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$。

解

求導外層，內層照代 x^2，內層 x^2+1 求導後是 $2x$，所以答案是 $\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 。

後面幾題用到了超出高中課綱的三角函數導函數：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x)=\cos(x)$、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x)=-\sin(x)$ 以及 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x)=\sec^2(x)$ 。

例題 4.4.4 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x^2)$

錯解 1 ⚠

外層 cos 求導後變成 sin，內層 x^2 求導後是 $2x$，所以答案是 $\cos(x)\cdot(2x)$。

錯解 2 ⚠

求導外層，內層照代 x^2，得到 $\cos(x^2)$。

解

求導外層，內層照代 x^2，內層 x^2 求導後是 $2x$，所以答案是 $\cos(x^2)\cdot(2x)$ 。

鏈鎖律可以看成是：f 先對 u 求導，接著 u 再對 x 求導。這樣看就很明顯 f' 裡面該代 u，也就是 $g(x)$。若以萊布尼茲的記號，我們可以簡單地將鏈鎖律視爲

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

想像等號右邊是兩個分數相乘，將 $\mathrm{d}u$ 約分掉後得到等號左邊。這樣子想，鏈鎖律就會變得很好記了。當然這不是什麼嚴謹手法，但數學家已經幫我們做好嚴謹論證，早已確定結果正確，所以我們大可放心地採用此種理解方式。

至於如果有三層函數合成在一起，像是 $f\big(g(h(x))\big)$，又怎麼辦呢？做數學的時候，常常都是化繁爲簡、用已知解未知。我們先看 $g(h(x))$ 作是單單一個函數，先忘記它也是合成函數，於是套鏈鎖律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left(g(h(x))\right)=f'\left(g(h(x))\right)\cdot\underline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(h(x))}$$

接著再就 $g(h(x))$ 本身去套鏈鎖律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(h(x))=g'(h(x))h'(x)$$

再代回去，就成了

$$f'(g(h(x))\cdot\underline{g'(h(x))\cdot h'(x)}$$

若以萊布尼茲的符號，就是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

例題 4.4.5 $y=\sqrt{1+\tan(x^2)}$，求 y'

解

$$y=\frac{1}{2\sqrt{1+\tan(x^2)}}\cdot\sec^2(x^2)\cdot(2x)$$

例題 4.4.6 $y=x^2\sin^2\left(2x^2\right)$，求 y'。

解

$$y'=2x\sin^2\left(2x^2\right)+x^2\left(2\sin\left(2x^2\right)\cdot\cos\left(2x^2\right)\cdot(4x)\right)$$

第 5 章

微分學的應用

這本龐大的書 (我指的是宇宙) 中寫了自然哲學，它一直敞開在我們的眼前，但不首先學會理解它的語言，並識別它書寫所用的字符，是不能讀懂它的，它是用數學的語言寫的。

伽利略

5.1　求切線與法線

欲寫出直線方程式，只要我們得知其斜率與其中所過一點，便可以寫出來。我們既然已經學過微分求切線斜率，那麼只要再搭配一個點，就可以寫出切線方程，於是也能順便求出法線方程式。

性質 5.1.1

若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可導，點 $P\big(a,f(a)\big)$ 爲其圖形上一點，則以 P 點爲切點的切線方程式爲

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

若 $f'(a)\neq 0$，則法線方程式爲

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

若 $f'(a)=0$，則法線方程式爲

$$x=a$$

note

1. 在 $x=a$ 處可導，表示 $f'(a)$ 存在，即曲線在 P 點有非鉛直的切線，其切線斜率爲 $f'(a)$。
2. 互相垂直的兩條斜直線，兩者斜率互相倒數並差負號。因此只要 $f'(a)$ 不爲 0，法線斜率就是 $-\frac{1}{f'(a)}$。而若 $f'(a)=0$，即 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 處有水平切線，則法線爲鉛直線。

例題 5.1.1　函數 $f(x)=\sqrt{x}$，求其圖形在 $(4,2)$ 處的切線及法線方程式。

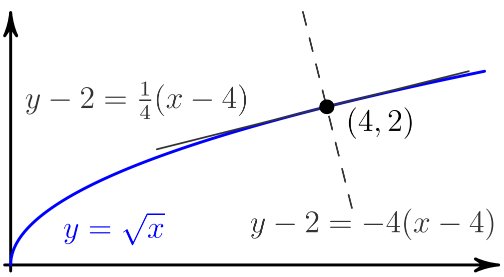
解

先求導函數 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，代入 $x=4$ 得到 $f'(4)=\frac{1}{4}$，因此切線方程式爲

$$y-2=\frac{1}{4}(x-4)$$

法線方程式爲

$$y-2=-4(x-4)$$



例題 5.1.2 自拋物線 $y=x^2-2x+2$ 外一點 $A(-1,1)$ 作切線，求切線方程式。

解

函數 $f(x)=x^2-2x+2$，設切點 $P(t,t^2-2t+2)$，

則在 P 點處切線斜率 $f'(t)=2t-2$、切線方程式 $y-(t^2-2t+2)=(2t-2)(x-t)$ 。

因 A 在此切線上，代入 $A(-1,1)$ $\Rightarrow 1-(t^2-2t+2)=(2t-2)(-1-t)$ $\Rightarrow t=1$ or -3

故切線方程式爲 $y-1=0$ or $y-17=-8(x+3)$ 。

note

$A(-1,1)$ 並不在拋物線上，所以不可將 -1 代入 $f'(x)$ 。

例題 5.1.3 求 $y=x^3-3x$ 與 $y=x^3-3x+32$ 之公切線方程式。

解

兩個函數的導函數皆爲 $y'=3x^2-3$

設兩切點 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 分別在 $y=x^3-3x$ 與 $y=x^3-3x+32$，即

$$\begin{cases} y_1 = x_1^3-3x_1 \\ y_2 \end{cases}$$

因兩點在同一切線上，故

$$\begin{aligned} & y'(x_1)=y'(x_2) \\ \Rightarrow\ & 3x_1^2-3=3x_2^2-3 \quad \Rightarrow x_2=-x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_2 &= x_2^3-3x_2+32 \\ &= -x_1^3+3x_1+32 && \boxed{x_2=-x_1} \\ &= -y_1+32 && \boxed{y_1=x_1^3-3x_1} \end{aligned}$$

得到此關係後，代回斜率表示法

$$\begin{aligned} & \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=3x_1^2-3 \\ \Rightarrow\ & \frac{2y_1-32}{2x_1}=\frac{x_1^3-3x_1-16}{x_1}=3x_1^2-3 \\ & \Rightarrow 2x_1^3=-16 \quad \Rightarrow x_1=-2 \quad \Rightarrow y_1=-2 \end{aligned}$$

故所求爲 $y+2=9(x+2)$。

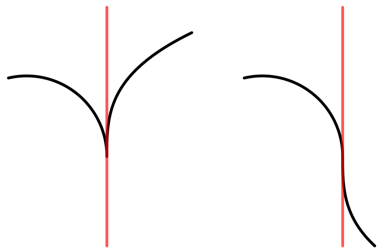
鉛直切線，也可以藉由求導來找出，方式如下。

性質 5.1.2　鉛直切線

若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續，且滿足

$$\lim_{x\to a}\left|f'(x)\right|=\infty$$

則其圖形在 $(a,f(a))$ 有鉛直切線 $x=a$ 。



例題 5.1.4　找出函數 $f(x)=\sqrt{x}$ 圖形的鉛直切線。

解

由導函數 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，可看出 $\lim\limits_{x\to 0}\left|f'(x)\right|=\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right|=\infty$，故鉛直切線爲 $x=0$。這是唯一的鉛直切線，因爲若 $x_0>0$，則 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ 都是有限的值。

■ 5.2　函數的單調性

微分學雖來自切線斜率問題，但它並不只是單純用在求切線上。其中一個直接的應用就是分析函數的單調性，也就是遞增或遞減。

定理 5.2.1　函數的單調性

若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續，且在 (a,b) 恆有 $f'(x)>0$，則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上嚴格遞增。

這件事還挺直觀的，導數即瞬時變化率，如果在一個區間上導數恆正，就是變化率始終是正的，其趨勢是一直在增加，便爲嚴格遞增。

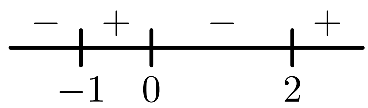
然而，開區間 (a,b) 上 $f'(x)>0$，爲什麼不是只能保證 $f(x)$ 在 (a,b) 上嚴格遞增，而是保證在更大一點點的區間 $[a,b]$ 上嚴格遞增呢？舉 $y=x^3$ 爲例，其導函數 $y'=3x^2$ 在 $x\neq 0$ 處皆正，但它在整個實數上都是嚴格遞增的，無須去掉 $x=0$ 這一點。粗略地解釋當中緣由，變化率只有在 $x=0$ 爲 0，就是說它幾乎一直在增加，只是那麼一瞬之間變化率爲 0。例如我們可以取 $x=0$ 和 $x=0.001$ 來看，$y=x^3$ 雖在 $x=0$ 導數爲 0，但在 $x=0$ 和 $x=0.001$ 之間，它還是爬升了，因此在 $x=0.001$ 處的函數值，還是比較大。

嚴格證明須用到大學才學的定理，故這裡使用直觀說明。

例題 5.2.1　函數 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$ 在哪些區間嚴格遞增？在哪些區間嚴格遞減？

解

導函數 $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x+1)(x-2)$
故 $f(x)$ 在 $[2,\infty)$ 及 $[-1,0]$ 嚴格遞增，
在 $[0,2]$ 及 $(-\infty,-1]$ 嚴格遞減。



例題 5.2.2 證明函數 $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$ 無正根。

解

在 $x = 0$ 處，$f(0) = 0$。導函數 $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1 > 0$ 恆成立，
故 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 爲嚴格遞增，則對於正數 k，必有 $f(k) > f(0) = 0$，因此無正根。

5.3 函數的凹凸性

爲了更深刻了解函數的特性，除了分析函數的遞增遞減外，還可進一步分析凹凸性。

比方說 $y = x^3$，它處處皆是遞增，但在 $x > 0$ 處與 $x < 0$ 處長得就是不太一樣。若是作幾條切線來觀察，雖然切線斜率總是正的，但在左半邊的切線斜率越來越小；右半邊的切線斜率越來越大。關於右半邊的圖形特徵，我們可以用 $y = x^2$ 來進行類比，右半邊就像 $y = x^2$ 一樣是往上凹的；至於左半邊，它就像 $y = -x^2$ 一樣往下凹。因此，我們可以由切線斜率的遞增遞減來定義凹凸性。

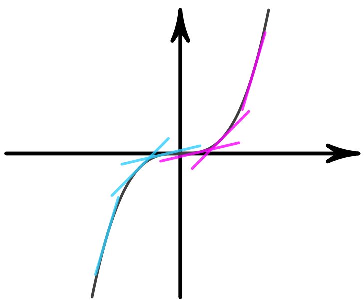


圖 5.1: 函數的凹凸性

定義 5.3.1　凹凸性
若可微函數 $f(x)$ 滿足 $f'(x)$ 在區間 (a,b) 上遞增，則 $f(x)$ 在 (a,b) 爲凸 (convex)，或稱爲凹向上 (concave up)；若滿足 $f'(x)$ 在區間 (a,b) 上遞減，則 $f(x)$ 在 (a,b) 爲凹 (concave)，或稱爲凹向下 (concave down)。

我們已學過利用導數的正負號來看遞增遞減，所以定義又可寫成：

定義 5.3.2　凹凸性
若二次可微函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 上恆有 $f''(x) \geq 0$，則 $f(x)$ 在 (a,b) 爲凸，或稱爲凹向上；若在區間 (a,b) 上恆有 $f''(x) \leq 0$，則 $f(x)$ 在 (a,b) 爲凹，或稱爲凹向下。

研究這些，就是爲了幫助我們了解函數圖形的特性，讓我們對於函數有比較深刻的了解。我們又想知道函數的凹凸性在何處發生改變，於是有了反曲點的概念。

定義 5.3.3　反曲點
若函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處連續，且在 $x = a$ 的兩側凹凸性不同，則稱 $(a, f(a))$ 爲反曲點，又稱爲拐點。

以上面 $y = x^3$ 的例子來說，$x = 0$ 左右兩側的凹向性不同，所以 $(0,0)$ 就是 $y = x^3$ 的反曲點。

除了分析二階導函數 $f''(x)$ 的正負區間外，大家也常先找二階導數爲 0 處，這的確好用，但是這裡要糾正一下常見誤解。

性質 5.3.1

若 $(a, f(a))$ 爲函數 $f(x)$ 圖形的反曲點，則必有 $f''(a) = 0$ 或 $f''(a)$ 不存在。

$(a, f(a))$ 爲函數 $f(x)$ 圖形的反曲點，那麼在 $x = a$ 的左右兩側的二階導數異號。若 $f''(x)$ 在 $x = a$ 處連續，則必有 $f''(a) = 0$。但 $f''(x)$ 並不見得連續，所以也有可能 $f''(a)$ 不存在。我們來看看一個簡單的具體例子：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases}$$

則

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , x \geq 0 \\ -2x & , x < 0 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 2 & , x \geq 0 \\ -2 & , x < 0 \\ \times & , x = 0 \end{cases}$$

$f''(x)$ 在 $x = 0$ 處是跳躍間斷點，其左右兩側的二階導數分別正與負，然而在 $x = 0$ 處本身卻不存在二階導數。另外還有個更簡單的例子：$y = x^{\frac{1}{3}}$，這個留給你自己檢驗！

note

高中教材往往是說：反曲點處的二階導數必爲 0 。這樣說也不能算錯，因爲高中談的是多項式函數的微積分，而多項式函數必可微分無限多次，所以不必講二次導數不存在的情況。但爲了避免你觀念根深蒂固，帶入大學去，這裡還是要強調這一點。

note

反曲點與二階導數爲 0，兩者是既不充分，也不必要。換句話說，反曲點並不必然二階導數爲 0，這點如前所示；二階導數爲 0 之處，亦不見得是反曲點，這可以舉 $y = x^4$ 爲例，明顯 $y''(0) = 0$，但左右兩側都是凸，$(0,0)$ 並不是反曲點！

5.4 函數的極值

微分學一個相當重要的應用就是求極值，這在物理學、經濟學、工程、生物學及藥學等等都有相關應用。比方說造一個固定容量的罐頭，我會想知道如何控制半徑與高最節省材料；經濟學上有收益函數，我會想知道如何使利潤極大；物理的光學中，光折射走的是所花時間最少的路徑。諸如以上問題，都是學過微積分的同學可以表演的場合。

定義 5.4.1 函數的最值

若 k 爲函數 $f(x)$ 定義域中的某一點，並且對函數定義域中任意一點 x，恆滿足

$$f(k) \geq f(x)$$

則稱函數 $f(x)$ 在 $x=k$ 處取得最大值 $f(k)$。類似地，t 爲 $f(x)$ 定義域中的某一點，並且對函數定義域中任意一點 x，恆滿足

$$f(t) \le f(x)$$

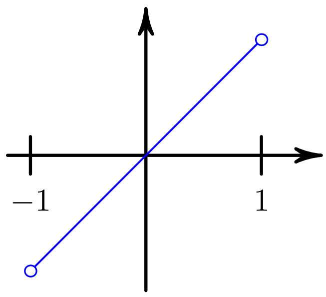
則稱函數 $f(x)$ 在 $x=t$ 處取得最小值 $f(t)$。

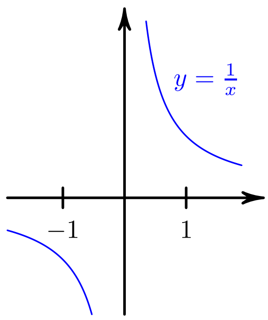
實用上，許多對象都是連續函數，又經常有個範圍限制。若範圍是個閉區間，連續函數有個很方便的定理讓我們知道一定有最大最小值：

定理 5.4.1 Weierstrass 最值存在定理

如果函數 $y=f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上連續，則函數 $f(x)$ 在此區間上存在最大值與最小值。

閉區間這個前提是重要的，例如 $f(x)=x$ 在開區間 $(0,1)$ 上並沒有最大最小值；函數要連續也是重要的，例如 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[-1,1]$ 上沒有最大最小值，這就是因爲 $f(x)=\frac{1}{x}$ 並沒有在 $[-1,1]$ 上連續。





note

在介紹函數的連續性時，曾提到連續性是重要的課題，函數的連續性會影響到許多性質與定理的成立與否，這裡便是一例。

定義 5.4.2 函數的極值

若 k 爲函數 $f(x)$ 定義域中的某一點，並且對函數定義域中 $x=k$ 附近 任意一點 x，恆滿足

$$f(k) \ge f(x)$$

則稱函數 $f(x)$ 在 $x=k$ 處取得極大值 $f(k)$。類似地，t 爲 $f(x)$ 定義域中的某一點，並且對函數定義域中 $x=t$ 附近 任意一點 x，恆滿足

$$f(t) \le f(x)$$

則稱函數 $f(x)$ 在 $x=t$ 處取得極小值 $f(t)$。

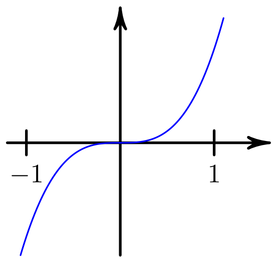
目前我們區分了最值與極值。最大值，又可稱爲 **絕對極大值** (absolute maximum)，它是全域最大的函數值；極大值，又可稱爲 **局部極大值** (local maximum) 或**相對極大值** (relative maximum)，它僅是其附近來說較大的，但可能不是在全域中最大。

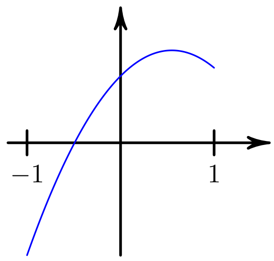
定理 5.4.2 費馬極值定理

a 爲函數 $f(x)$ 定義域中的內點，若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處取得極值，並且在 $x=a$ 處可導，則必有 $f'(a)=0$。

note

1. 對於定義域的內點 a，若是 $f'(a)$ 正或負，表示函數在 $x=a$ 處嚴格遞增或嚴格遞減，那就不會是極值。
2. 請注意敘述邏輯，不可反過來說，若 $f'(a)=0$ 則在該處取得極值。例如下圖左，函數 $f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，但 $x=0$ 處並非極值。
3. 說 $f'(a)=0$，那是在 $f(x)$ 於 $x=a$ 處可導的前提下，也有可能該點是不可導的。例如 $f(x)=|x|$，在 $x=0$ 處有極小值，但 $f'(0)$ 不存在。
4. 若 a 不是內點，而是邊界，便不成立。如下圖右，邊界 $x=-1$ 及 $x=1$ 處。





有了費馬極值定理，我們可以找出存在極值的「嫌疑犯」：導數爲 0 處、不可導處、邊界，其中前兩者稱爲 **臨界點** (critical point)。但這些只是嫌疑犯，不見得就是極值，我們還須要進一步檢定到底是不是極值。檢定的方法有三個，分別是一階檢定法、二階檢定法以及代點檢定法。其中前兩個方法是正確的，而第三種是錯誤的。錯的我講來幹嘛？我不是無聊，是提醒你避免此種常犯錯誤，很多人代 $x=a$ 的左右邊各一個點，都比 $f(a)$ 還小，就說 $f(a)$ 是極大值。a 附近的點有無限多個，你代有限個點不能說明什麼。

5.4.1 一階檢定法

若是函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 左方嚴格遞增、在 $x=a$ 右方嚴格遞減，那麼顯然 $f(x)$ 在 $x=a$ 處取得極大值；若 $f(x)$ 在 $x=a$ 左方嚴格遞減、在 $x=a$ 右方嚴格遞增，那麼顯然 $f(x)$ 在 $x=a$ 處取得極小值。而我們又學過利用導數的正負號來研究遞增遞減，因此我們可以透過分析 $f'(x)$ 在 $x=a$ 附近的正負，來確定是否極值、是極大還是極小。

定理 5.4.3

設 c 爲區間 I 的內點，函數 f 在區間 I 上連續且在 I 上 c 的附近可導（f 在 c 本身可以不可導），則

1. 若在 c 的左側有 $f'(x)<0$，在 c 的右側有 $f'(x)>0$，則 $f(c)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的相對極小值。
2. 若在 c 的左側有 $f'(x)>0$，在 c 的右側有 $f'(x)<0$，則 $f(c)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的相對極大值。
3. 若 $f'(x)$ 在 c 的兩側同號，則 $f(c)$ 既不是極大值也不是極小值。

例題 5.4.1 求函數 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 在 $[-2,3]$ 上的最大最小值。

解

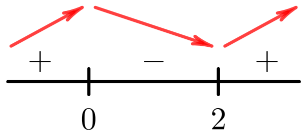
端點的函數值爲 $f(-2)=-19$ 及 $f(3)=1$

導函數 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

故在 $x=0$ 處有極大值 $f(0)=1$

$x=2$ 處有極小值 $f(2)=-3$

因 $f(-2)<f(2)$，最小值爲 $f(-2)=-19$，最大值爲 $f(0)=f(3)=1$。



例題 5.4.2 求函數 $f(x)=|x|$ 的極大極小值。

解

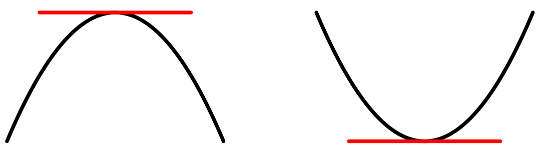
注意

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & ,x\geq 0 \\ -x & ,x<0 \end{cases} \quad \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 1 & ,x>0 \\ \times & ,x=0 \\ -1 & ,x<0 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 處有極小值 $f(0)=0$。

5.4.2 二階檢定法

對於一階導數爲 0 處，若該點位於曲線凹向下的部分，則該點爲極大；若位於凹向下部分，該點爲極小。如下圖所示。



而我們又學過以二階導數的正負號來判定凹凸性，於是就有了土尖原理：

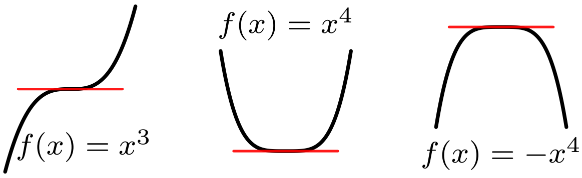
定理 5.4.4 土尖原理

二次可導函數 $f(x)$ 滿足 $f'(k)=0$，則

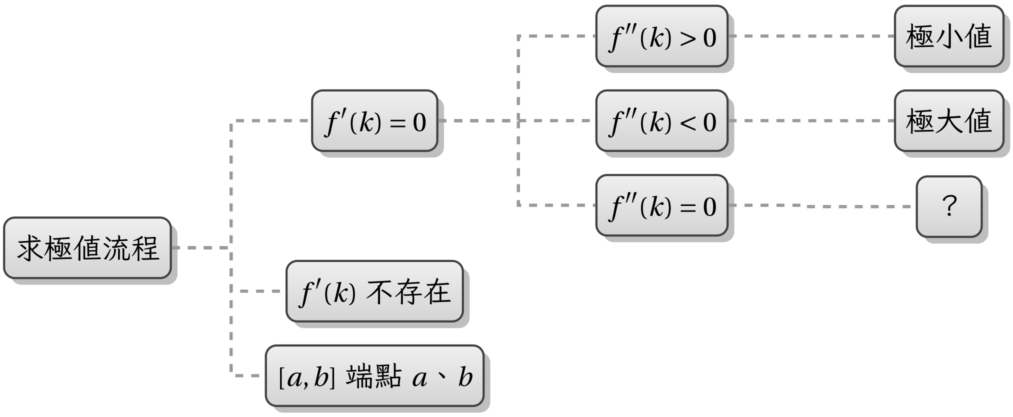
1. 若 $f''(k)$ 爲 $+$，則 $f(x)$ 在 $x=k$ 處有極小值
2. 若 $f''(k)$ 爲 $-$，則 $f(x)$ 在 $x=k$ 處有極大值

其中 $-$、$+$ 形成一土字，小、大形成一尖字。

但是在二階導數爲 0 處，是暫時沒有結論的。下圖有三個例子，他們都有 $f'(0)=f''(0)=0$，但非極值、極小值、極大值都有可能。



於是二階檢定法的流程可整理如下：



勿以爲一階導數、二階導數皆爲 0 處是反曲點。

例題 5.4.3 求函數 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 在 $[-2,3]$ 上的最大最小值。

解

端點的函數值爲 $f(-2)=-19$ 及 $f(3)=1$
導函數 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$、二階導函數 $f''(x)=6x-6=6(x-1)$
解 $f'(x)=0$ 得 $f'(0)=f'(2)=0$，代入二階導函數得 $f''(0)<0$、$f''(2)>0$。
故在 $x=0$ 處有極大值 $f(0)=1$、$x=2$ 處有極小值 $f(2)=-3$
由於 $f(-2)<f(2)$，故最小值爲 $f(-2)=-19$、最大值爲 $f(0)=f(3)=1$。

例題 5.4.4 求函數 $f(x)=x^3-x^5$ 極大極小值。

解

$$f'(x)=3x^2-5x^4=x^2(3-5x^2)$$
$$f''(x)=6x-20x^3=2x(3-10x^2)$$

奇函數

解 $f'(x)=0$ 得 $x=0,\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$，代入 $f''(x)$ 得

$$f''\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=-2\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot(3-6)>0,\ f''(0)=0,\ f''\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=-f''\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)>0$$

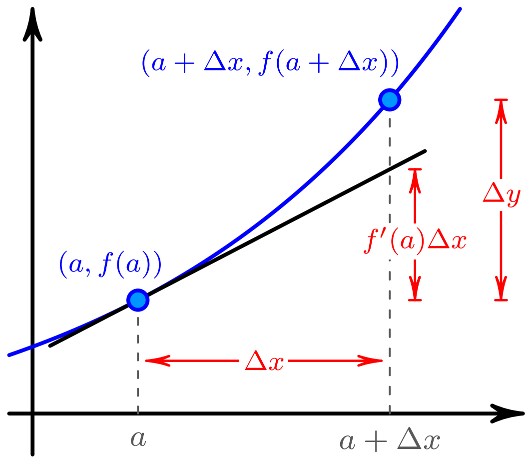
故在 $x=-\sqrt{\frac{3}{5}}$ 處有極小值 $f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=-\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$；

而 $x=\sqrt{\frac{3}{5}}$ 處有極大值 $f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=-f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$；$x=0$ 處無法判定。

■ 5.5 函數的一次近似

求導的想法是先寫出割線斜率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，接著讓 $\Delta x \to 0$ [1]。萊布尼茲說，當 $\Delta x \to 0$ 時，Δx 與 Δy 都是趨向零，它們是**無窮小增量**，便將 Δx 與 Δy 各自改寫成 $\mathrm{d}x$ 與 $\mathrm{d}y$，所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 便寫成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$！

且讓我們將此過程稍微拉回來。如果 Δx 還沒無限靠近到零，只不過還是個很小的量，那又如何呢？



我們來看看右圖。在 $x = a$ 處的函數值是 $f(a)$，經過變化量 Δx 後，在 $x = a+\Delta x$ 處的函數值是 $f(a+\Delta x)$ 。這兩點函數值的真實差距為

$$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$$

以 $(a, f(a))$ 為切點作切線，其斜率為 $f'(a)$，經過變化量 Δx 後，在切線上的 y 的變化量是

$$f'(a)\Delta x \qquad \boxed{\Delta y = m\Delta x}$$

兩點函數值的差距 Δy 與切線上的 y 的變化量 $f'(a)\Delta x$，在 Δx 很小的時候，兩者是非常接近的 (圖是為了方便辨認所以把 Δx 畫很大)。既然兩者非常接近，那我就可以說：

$$\Delta y \doteqdot f'(a)\Delta x \tag{5.1}$$

切線是直線，所以無論 Δx 大小，其對應的 y 的變化量都是 Δx 再乘上斜率 $f'(a)$ 。而當 Δx 很小，它很接近函數值的變化量，這就是式子 (5.1) 的意義。

總結以上，我們在曲線上某點附近，可以局部地**以切線代替曲線**。於是它的一個應用就是利用切線代替曲線的想法來估值。這又有另一個名稱，叫做**一次近似** (linear approximation)。我們在以前也曾學過內插法，那其實是以割線代替曲線！都是直線代替曲線的一種。

讓我來對式子 (5.1) 做點變形，使它看起來和高中課本中教你的一次近似看起來更像：

$$
\begin{aligned}
& \Delta y \doteqdot f'(a)\Delta x \\
\Rightarrow\ & f(a+\Delta x) - f(a) \doteqdot f'(a)\Delta x \\
\Rightarrow\ & f(x) - f(a) \doteqdot f'(a)(x-a) \qquad \boxed{x = a+\Delta x} \\
\Rightarrow\ & f(x) \doteqdot f'(a)(x-a) + f(a)
\end{aligned}
$$

性質 5.5.1 一次近似

函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 附近的一次近似為一次方程

$$f'(a)(x-a) + f(a)$$

[1] Δx 代表著 x 的「差」，差的英文是 difference ，其第一個字母 d 對應到希臘文是 δ 。而 δ 的大寫是 Δ，所以放在 x 的前面，Δx 代表 x 的差。

一次近似可以有什麼應用？它到底想要近似什麼？這裡舉個具體例子。在 $y=x^2$ 上先標出 $(2,4)$，我們想知道當 $y=4.3$ 時，x 坐標是多少，換句話說就是求 $\sqrt{4.3}$ 。然而這個我們不太會算，便使用切線代替曲線。以 $(2,4)$ 爲切點作切線，我們看看 $y=4.3$ 在此切線對應的 x 坐標。而因爲 4.3 離 4 還不太遠，所以 $y=4.3$ 在切線上與其在曲線上所對到的 x 值，便非常接近。在切點 $(2,4)$ 的附近，我們有

$$f(x) \doteqdot f'(2)(x-2)+f(2)$$

其中 $f(2)=2^2=4$，而 $f'(2)=2x\Big|_{x=2}=4$，代入得

$$4.3=4(x-2)+4$$

兩邊同減 4 得

$$0.3=4(x-2)$$

$$\Rightarrow x-2=\frac{0.3}{4}=0.075$$

所以我們的估計就是

$$\sqrt{4.3} \doteqdot 2+0.075=2.075$$

而用計算機求的精確值是

$$\sqrt{4.3}=2.073644135\cdots$$

果然，估計值與精確值相距並不遠。

其實若參考 108 課綱以及南一版的教科書，只要求同學能寫出函數在給定點的一次近似，並不要求應用。所以以備考的角度來說，你只要按照性質 5.5.1去答題即可。

■ 5.6 牛頓求根法

數學上並不總是在求精確解，其實數學存在很多估計手法。因爲事實上許多問題是根本解不出來[2] 或者極難解的，但是在實用的問題中我又必須去解，只要和實際的解誤差不太大就好了。比方說你是工程師，我叫你去蓋一座橋，你總不能經過列式計算之後，跟我說造橋過程涉及的式子解不出來，所以這橋沒辦法造。我仍然要逼你造橋！你要做的其實是做個大概的估計，能用就行。

就以求方程式的根來說，國中考你的解方程式都太簡單了，不是一次式就是二次式，當然解得出來[3]。但你如果是物理學家、工程師、經濟學家，你在處理實際問題，有可能成天讓你解二次方程嗎？不是的，你可能是在解一些看起來很奇怪很可怕的式子。

我們在高一多項式函數的主題裡面曾學過勘根定理，這是一種當我們難以精確求出根時，一種約略估計根落在哪個範圍的方法。但這只不過是給出範圍，如果比方說我希望逼近根到小數點後三位，用勘根定理的話顯然就不現實了[4]！

現在我們來介紹其中一種利用不斷做切線來逼近根的方法：**牛頓求根法** (Newton-Raphson method)。

參考右圖，我們先選取 x_0 處出發，此時與實際的根（曲線與 x 軸交點）尚有點距離。

從 x_0 處往上對應到曲線上的點 $(x_0, f(x_0))$，以此點爲切點作切線 T_1。T_1 與 x 軸交於一點，我們稱此交點爲 x_1。

繼續相同流程，從 x_1 處往上對應到曲線上的點 $(x_1, f(x_1))$，以此點爲切點作切線 T_2，T_2 與 x 軸交於一點，我們稱此交點爲 x_2。

不斷重複此流程，繼續做出 x_3、x_4、$\cdots$ 從圖中可見，x_n 會越來越逼近實際的根，這就是牛頓求根法的精神。

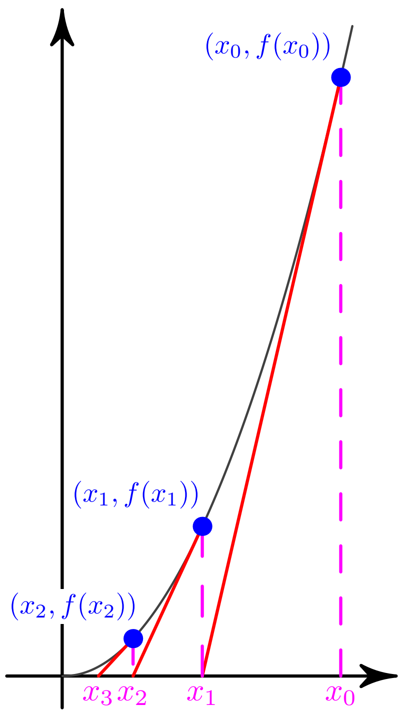


圖 5.2: 牛頓求根法

如果上述牛頓求根法的精神看懂了，接著我們來試著具體寫出 x_n 的遞迴式！

首先，已知 x_0，怎麼樣用 x_0 來表示出 x_1 呢？如果我們能表達出 $\overline{x_0x_1}$ 的長度，用 x_0 減去此長度便是了！所以現在聚焦在如何表達此長度。

我們觀察由 $(x_0, 0)$、$(x_0, f(x_0))$ 及 $(x_1, f(x_1))$ 三點所形成三角形，在圖中可見，其斜邊是紅色切線 T_1，另外兩股邊分別爲鉛直的粉紅虛線、x 軸。如果把 $\overline{x_0x_1}$ 的長度標爲 Δx、鉛直的粉紅虛線標爲 Δy，紅色切線的斜率爲 $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$。經過移項可以得到我們在上一節

---

[2]這意思是說，解實際上是存在的，但是卻不可能解出來。

[3]我的意思當然是排除無實數解的二次方程！

[4]眞要的話，我提供方法：首先 $x = 3$、$x = 4$ 代了之後分別爲正、爲負，所以根落在 $(3, 4)$；下一步代 $x = 3.5$，還是正的，所以根落在 $(3.5, 4)$；接著代 $x = 3.75$，是負的，所以根落在 $(3.5, 3.75)$；再帶 $x = 3.625$ ……我已經懶得再寫了！我所用的這個方法，叫做二分法，不斷地把已知範圍切成兩半，用勘根定理確認根落在哪一半，如此不斷把範圍的長度縮小爲上一步的一半。如此反復做下去，你想精確到小數點後三位的話確實辦得到。但你有耐心用這個方法嗎？我是沒有！

也用過的關係式：

$$\Delta y = m\Delta x \tag{5.2}$$

不過現在我們換個移項方式，改寫成

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{m} \tag{5.3}$$

其中，Δx 就是我們現在想試圖表達出的 $\overline{x_0x_1}$ 長度；m 是切線 T_1 的斜率，即 $f'(x_0)$；Δy 則是 x_0 處的函數值：$f(x_0)$。這幾項分別搞清楚之後，我們就知道 $\overline{x_0x_1}$ 長度可表爲

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{5.4}$$

剛剛說用 x_0 減去此長度便是 x_1，也就是說：

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{5.5}$$

如果我們再繼續看下一個、下下個三角形，不難發現每一組 x_{n+1} 與 x_n 的關係都差不多。換句話講，式子 (5.5) 實際上就代表了每個 x_{n+1} 與 x_n 之間的關係：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5.6}$$

例題 5.6.1 若 $f(x) = x^3 - 5x + 1$，以 $x_0 = -3$ 作爲初始值，使用牛頓求根法法迭代三次來逼近 $f(x)$ 的根。

解

注意，以下計算過程是需要計算機的。
$f'(x) = 3x^2 - 5$，並使用 $x_0 = -3$：

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
&= -3 - \frac{(-3)^3 - 5\cdot(-3) + 1}{3\cdot(-3)^2 - 5} \\
&= -2.5 \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\
&= -2.345455 \\
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\
&= -2.330203
\end{aligned}$$

第 6 章

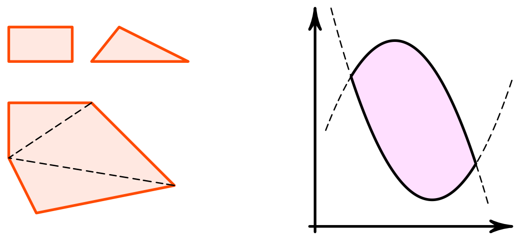
積分的定義與性質

論各種算學，不外乎加減乘除。余作《學算筆談》，從算學之至淺者起，由漸而深。至第十卷而論微分，第十一卷而論積分，已達今日算學中極深之事矣。微積之外或能更有他種算學深妙于此，亦未可知也。當今之世尚未能有其書，須俟後之算學家創之，非余之所及見矣。

清代數學家華蘅芳

6.1 積分的定義

積分學源自於求面積的問題，我們已經學過許多求面積的問題。長方形、平行四邊形、梯形、三角形以及其它多邊形等等，這些都是由直線段所圍成的，算是比較容易計算。但是如果由曲線所圍，就沒這麼簡單了。



現在有一個在區間 $[a,b]$ 上的函數，我們要討論它在 $[a,b]$ 區間上的曲線下面積。爲了簡化討論，我們先假定此函數在 $[a,b]$ 上非負，接著再討論更複雜的情況。現在我們不知道怎麼算，但還是一樣，試圖藉由已知來突破未知。首先將它切成四個子區間，然後每個子區間中都畫個長方形，每個子區間中都取函數最大值爲長方形的高。這樣算出來的東西，我們稱之爲**上和**，符號記爲 U_n，n 是切出的子區間數。上和會比欲求的曲線下面積多出一點。如果在剛剛的過程中，改取函數最小值爲長方形的高。這樣算出來的東西，我們稱之爲 **下和**，符號記爲 L_n。下和會比欲求的曲線下面積少一點。

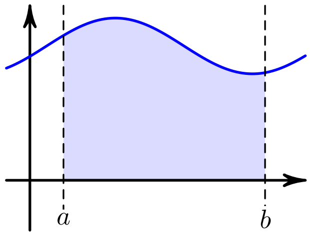
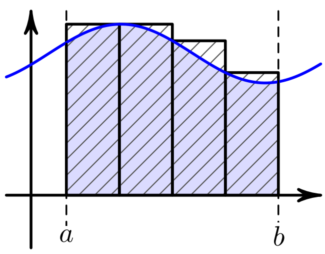
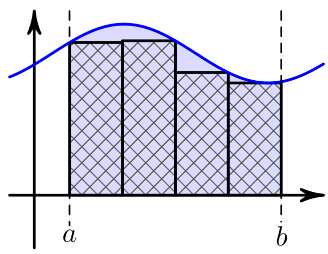


圖 6.1:



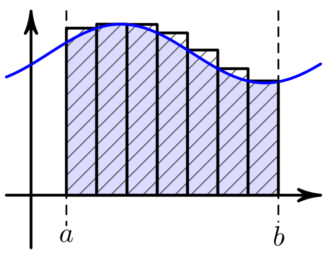
(a) 上和 U_4



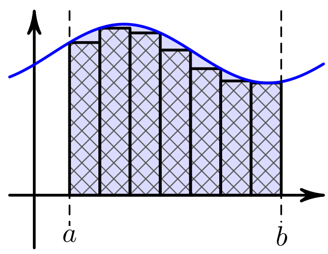
(b) 下和 L_4

圖 6.2: 上下和 $n=4$

如果計算上下和時，切成更多子區間，比方說現在切成七個子區間，那麼上下和與實際面積之間的誤差就會更小。



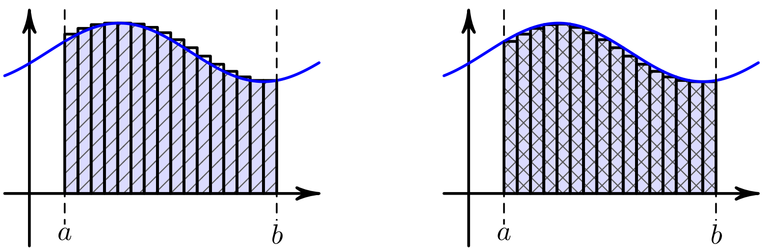
(a) 上和 U_7



(b) 下和 L_7

圖 6.3: 上下和 $n=7$

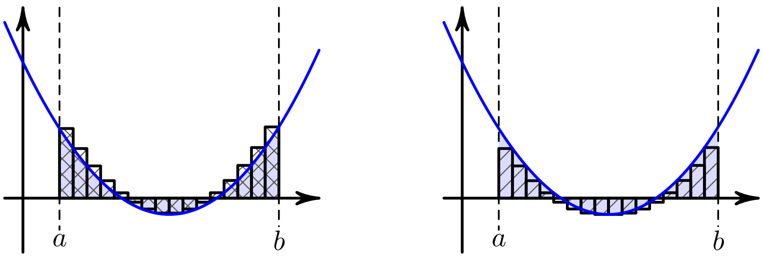
更進一步，切成十六個子區間，那麼上下和與實際面積之間的誤差就會更小。隨著這流程這樣越切越細，上下和與實際面積就越來越接近。



(a) 上和 U_{16} (b) 下和 L_{16}

圖 6.4: 上下和 $n=16$

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有負，還是可以套用一樣流程，只是在 $f(x)<0$ 的範圍，算出來的「矩形面積」會是負的，這因爲我們拿 $f(x)$ 函數值當高。



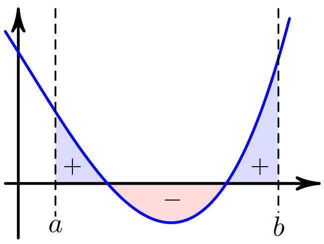
(a) 上和 U_{16} (b) 下和 L_{16}

圖 6.5: 上下和

所以，我們須將曲線下面積定爲**有號面積** (signed area)。

定義 6.1.1 有號面積

若函數 $f(x)$ 在區間 I_1 上爲正、在區間 I_2 上爲負，則 $f(x)$ 在 I_1 上的曲線下面積爲正、在 I_2 上的曲線下面積爲負。



定義 6.1.2

若 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上有定義，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 的曲線下面積爲 A，在 $[a,b]$ 取出分割點：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，將 $[a,b]$ 分割成等寬的 n 個子區間，每個子區間寬度爲 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$。若 $f(x)$ 在第 i 個子區間中的最大值發生在 ${x_i}^{\star}$、最小值發生在 $x_{i_\star}$，則上和 U_n 與下和 L_n 定義爲

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} f({x_i}^{\star})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f({x_i}^{\star})\left(\frac{b-a}{n}\right)$$
$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i_\star})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i_\star})\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

我們學過夾擠定理，現在既然 $L_n \le A \le U_n$ 必然成立，那麼只要上下和有相同極限，就可以推出曲線下面積。在十七世紀微積分尚在發展的階段，數學家們將曲線想得太美好，以爲上下和一定會有相同極限，後來才發現其實有許多函數，它們的上下和並不會有相同極限，才意識到函數**可積性** (integrability) 的問題。所幸在高中我們還不用討論這種問題，即使在大一微積分課程對此也著墨不多，我們不必耗費太多功夫研讀可積性問題。

定義 6.1.3

若上和 U_n 與下和 L_n 有相同的極限 L，則根據夾擠定理，曲線下面積 A 也會等於 L。此時稱函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積 (integrable)，並將此曲線下面積表爲

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

萊布尼茲將拉丁文中的長 s （「和」 的拉丁文 summa 第一個字母），作爲積分的符號 $\int$ 。而隨著 $n \to \infty$，子區間寬度 $\Delta x \to 0$，便將其寫成 $\mathrm{d}x$ 。

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\ \Delta x_i$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

所謂的積分，其實就是連續的加。離散的加法是 $\sum$；連續的加法是 $\int$ 。微積分的創造，是一種離散到連續的飛躍。自此，若離散情況欲類推至連續情況，就經常與微積分有關。比方說幾個質點求質心，使用 $\sum$；整個物體求質心，使用 $\int$ 。定力或是一次函數變力作功，求長方形或梯形面積；更複雜的變力作功，使用 $\int$ 求曲線下面積。在一個均勻向量場 (重力場、磁場等等) 中移動，直接作向量內積 (重力或磁力與位移內積)；若是向量場並不均勻，譬如說磁場中各處的磁力不盡相同，那就用到更困難的向量積分。

離散	連續
數列	函數
x_k	x
Δx_k	$\mathrm{d}x$
Σ	$\int$
$\dfrac{\Delta F(x_k)}{\Delta x_k}$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

例題 6.1.1 求曲線 $y = x^2$ 與 $x = 0$、$x = 1$ 及 x 軸所圍區域面積。

範圍是 $x = 0$ 到 $x = 1$，全長 $1 - 0 = 1$，每個子區間寬度爲 $\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$。由於函數

$f(x)=x^2$ 在區間 $[0,1]$ 上遞增，求上和時每個子區間都是取最右端的點、求下和時每個子區間都是取最右端的點。於是

$$\begin{aligned}
\text{上和 } U_n &= \frac{1}{n}\cdot\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]\\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\left(1^2+2^2\cdots+n^2\right)=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
\text{下和 } L_n &= \frac{1}{n}\cdot\left[\left(\frac{0}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]\\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\left(0^2+1^2\cdots+n^2\right)=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}
\end{aligned}$$

於是就有

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=\lim_{n\to\infty}L_n$$

便知所求面積為 $\frac{1}{3}$。

做積分有四道流程：切割、取樣、求和、取極限。由上題中看來似乎有些麻煩，其實這題已經是非常非常簡潔了！畢竟它只有單項。要是面對更多項，甚至是負數次方、指對數、三角函數，這些做起來可就是大麻煩了！幸好，牛頓、萊布尼茲提出微積分基本定理，讓我們在許多時候處理積分問題不必這麼麻煩。

6.2 積分的性質

由於積分是在求面積，我們可以利用一些直觀上對面積的理解，列出積分的性質[1]。當我們熟悉這些性質，也對之後做積分問題大有幫助。

性質 6.2.1 積分的性質

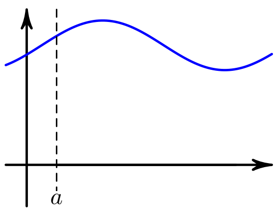
若實數 a,b,c 滿足 $a<b<c$，函數 $f(x),g(x)$ 皆在區間 $[a,b]$ 可積，k 為一實數。則

1. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$
2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
4. $\int_a^b f(x)\pm g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
5. $\int_a^b k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
6. 若 $f(x)\ge g(x)$ 在 (a,b) 上恆成立，則 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

[1]當然也可以進行數學上的證明，但這裡不下此麻煩的功夫。

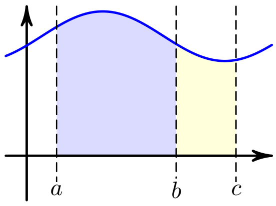
7. 若 $f(x) \geq 0$ 在 (a,b) 上恆成立，則 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

1. 從 $x=a$ 到 $x=a$ 的曲線下面積，寬度是 0，所以面積也是 0。



惠施曾云：「無厚，不可積也，其大千里。」其謂此歟！

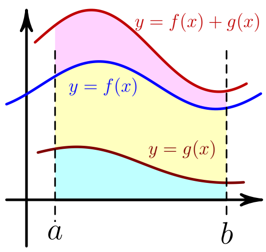
2. 兩段積分再相加，等於一口氣整段積分。



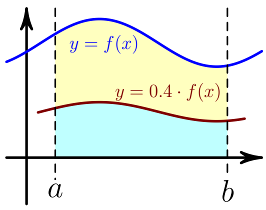
3. 利用 2.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}=}0 \Rightarrow \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

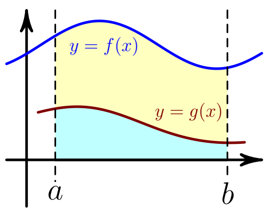
4. 先加減再積分等於先積分再加減



5. 先某倍再積分等於先積分再某倍



6. 較大的函數，曲線下面積較大



7. 恆非負的函數積分也非負，在上一個性質取 $g(x)=0$ 就知了。

別輕看這些看起來很簡單好懂的基本性質，他們很有用的。假設知道 $\int_a^b x^m \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}=}\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$，雖然是單項的，但有了上面性質，那麼任意多項式都能套用了！

例題 6.2.1 求積分 $\int_1^3 x^2-x+1\,\mathrm{d}x$。

解

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2-x+1\,\mathrm{d}x &= \int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x-\int_1^3 x\,\mathrm{d}x+\int_1^3 1\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{3^3-1^3}{3}-\frac{3^2-1^2}{2}+\frac{3^1-1^1}{1}\\ &=\frac{26}{3}-4+2=\frac{20}{3}\end{aligned}$$

另一例如下題這個估值。

例題 6.2.2 證明 $1\le\int_0^1\frac{x^4+1}{\sqrt{x^5+1}}\,\mathrm{d}x<\frac{6}{5}$。

解

$$\frac{x^4+1}{\sqrt{x^5+1}}<x^4+1 \qquad \boxed{\text{原式分母比 1 大}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1\frac{x^4+1}{\sqrt{x^5+1}}\,\mathrm{d}x<\int_0^1 x^4+1\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x+\int_0^1 1\,\mathrm{d}x=\frac{1^5-1^0}{5}+1=\frac{6}{5}$$

另一個方向，若能說明 $\frac{x^4+1}{\sqrt{x^5+1}}\ge 1$ 在 $[0,1]$ 上恆成立，便有 $1\le\int_0^1\frac{x^4+1}{\sqrt{x^5+1}}\,\mathrm{d}x$。所以

$$\begin{aligned}&\frac{x^4+1}{\sqrt{x^5+1}}\ge 1 \Leftrightarrow x^4+1\ge\sqrt{x^5+1}\Leftrightarrow (x^4+1)^2\ge x^5+1\\ &\Leftrightarrow x^8+2x^4+1\ge x^5+1\Leftrightarrow x^8+2x^4\ge x^5\end{aligned}$$

由於 $x^4\ge x^5$ 在 $[0,1]$ 上恆成立，故 $x^8+2x^4\ge x^4\ge x^5$ 在 $[0,1]$ 上恆成立，便可推得 $\frac{x^4+1}{\sqrt{x^5+1}}\ge 1$ 在 $[0,1]$ 上恆成立，故 $1\le\int_0^1\frac{x^4+1}{\sqrt{x^5+1}}\,\mathrm{d}x$。

在上一題中，你不可能手算出其精確積分值。但是我們透過簡單估計上下界，就知道積分值在 1 到 1.2 之間。雖然還是不知道精確值，起碼有個範圍。

性質 6.2.2　奇偶性

若函數 f 在 $[-a,a]$ 上為可積的奇函數，函數 g 在 $[-a,a]$ 上為可積的偶函數。則有

1. $\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$
2. $\int_{-a}^a g(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x$

這是由於奇函數與偶函數的對稱性，使我們知道 $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$，及 $\int_{-a}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x$，於是便有上述結果。

例題 6.2.3 求積分 $\int_{-1}^{1} 13x^3 + 3x^2 - 7x + 1 + \sin(x)\,\mathrm{d}x$。

解

首先將被積分函數拆爲 $f(x) = 13x^3 - 7x + \sin(x)$ 及 $g(x) = 3x^2 + 1$，其中 $f(x)$ 是奇函數、$g(x)$ 是偶函數。故所求爲

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 0 + 2\int_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{1} 3x^2 + 1\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[x^3 + x\right]_0^1 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

例題 6.2.4

解

這是網路上廣爲流傳的趣圖，連 WiFi 密碼還須會微積分。

仔細看被積分函數，$x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ 是奇函數函數 x^3 乘上偶函數 $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$，其結果爲奇函數。而它如果再乘上偶函數 $\sqrt{4-x^2}$，結果還是奇函數。

所以處理方式爲

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\\
=&\int_{-2}^{2}\left(x^3\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{\text{把括號乘開}}
\end{aligned}$$

注意第一個積分是奇函數在對稱區間上的積分，其值爲 0；第二項是上半圓 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的積分再一半，就是說，考慮半徑爲 2 的圓，求四分之一圓面積，那就是 $\frac{1}{4}\cdot 2^2\pi=\pi$ 了。

所以，WiFi 密碼就是 31415926，因爲 $\pi \doteqdot 3.1415926$。

看什麼看？沒看過空白頁？

This page is intentionally left blank

第 7 章

微積分基本定理

微積分是連續運動和變化模式的研究。17 世紀牛頓和萊布尼茲發明了微積分，爲科學家提供了描述連續運動的一種數學上的精確方法。

Devlin

7.1 微積分基本定理第一部分

微分學探討切線斜率，而積分學求面積，看起來是兩回事。然而在微分與積分正被數學家們不斷研究的過程中，某些敏銳的數學家，例如牛頓的老師 Issac Barrow，已經隱約察覺此二者之間似乎有互逆的關係。後來牛頓與萊布尼茲，不但都系統性地發展微分與積分，並且也提出了二者之間的互逆關係，由此奠定了微積分學的重要基石。

在一開始討論積分的時候，我們要進行分割、取樣、求和、取極限的步驟，有時候還要搭配和差化積公式、有時候要改變分割方式，或者改變取樣方式。如此耗費工夫又難寫，等你做完一題積分，秦始皇都已經把萬里長城蓋好了。然而當我們看出積分與微分的互逆性以後，我們便可以將積分問題的大麻煩（分割、取值、求和、取極限），變爲小麻煩（求出反導函數再代值）。仍可能很不好做，但已經簡化不少。

微積分基本定理分爲兩個部分，爲了討論第一個部分，我們先來認識一種函數：

$$F(x)=\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

可之稱爲 **變限函數**，照字面看是「變數放在積分上限」的意思。將函數寫成這德性，就是說現在有一個新函數 F，姑且稱之爲面積函數，它是由 f 的曲線下面積定的。爲了不致變數混淆，先把 x 軸改稱 t 軸，接著畫 $y=f(t)$。我們現在對 f 做積分，起點是固定的 a，終點則是會變動的 x。x 的改變導致曲線下面積改變，這就是 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的意義。

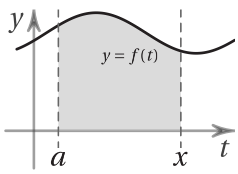


圖 7.1: 變限函數

以下再用一个比喻，來助你理解這個函數的意義，以及微積分基本定理的意思。

假設你早上九點開始唸書。唸書效率總是有高有低的，$f(t)$ 就是你的唸書效率函數。唸書效率乘以唸書時間，就是唸書成果。但因爲現在唸書效率函數是曲線，不是固定的，所以沒辦法直接乘，而是唸書效率函數這條曲線下的面積。如果你讀到下午三點，那麼你的唸書成果就是

$$F(15)=\int_9^{15} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$f(t)$ 從 $t=9$ 到 $t=15$ 之間的曲線下面積。如果你讀到晚上九點，那麼你的唸書成果就是

$$F(21)=\int_9^{21} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$f(t)$ 從 $t=9$ 到 $t=15$ 之間的曲線下面積。一般來說，$F(x)$ 就是你從早上九點，也就是 $t=9$，唸書唸到 $t=x$ 的時候，這期間所累積的唸書成果。

假設現在你已經很累了，正在考慮要不要去睡覺。你心想，如果現在多唸一小段時間，所造成的唸書成果變化率還蠻大的話，那就先撐著。如果很小，那還是先休息好了。

多唸一小段時間，所造成的唸書成果變化率，這不就是將 $F(x)$ 微分嗎？也就是說，如果現在是晚上十點，那麼此時多唸一小段時間，所造成的唸書成果變化率，就是 $F'(22)$。在 $t=x$ 時多唸一小段時間，所造成的唸書成果變化率，就是 $F'(x)$。

可是話說回來，什麼叫做「多唸一小段時間所造成的唸書成果變化率」呢？說穿了不就是唸書效率嗎？也就是說，$F'(22)$ 根本就是 $f(22)$；$F'(x)$ 根本就是 $f(x)$。如果你能理解我在說什麼，這其實就是微積分基本定理的第一部份了！

定理 7.1.1　微積分基本定理第一部分

若 f 在 $[a,b]$ 上連續，則 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上連續且在 (a,b) 上可導：

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x),\quad \forall x\in(a,b)$$

例題 7.1.1　求以下函數的導函數：

$$(1)\ \int_1^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t \qquad (2)\ \int_0^x t^4-3t+3\,\mathrm{d}t$$

$$(3)\ \int_0^x \sin(\cos(t))\,\mathrm{d}t \qquad (4)\ \int_1^x \sqrt{t^3-t^2+55}\,\mathrm{d}t$$

解

全都太容易了！要對 $F(x)$ 求導，只須將 x 直接代入 $f(t)$ 之中即可：

$$(1)\ \sin(x^2) \qquad (2)\ x^4-3x+3$$

$$(3)\ \sin(\cos(x)) \qquad (4)\ \sqrt{x^3-x^2+55}$$

例題 7.1.2　$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_x^1 \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$

解

現在變數長在積分下限，怎麼辦呢？很簡單，只要利用積分的性質

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 \sin(t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\int_1^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t\right)=-\sin(x^2)$$

7.2　微積分基本定理第二部份

我們平常更常用到的，是微積分基本定理的第二部分。

定理 7.2.1　微積分基本定理第二部分

若函數 f 在 $[a,b]$ 上連續，且函數 F 在 $[a,b]$ 上是 $f(x)$ 的反導函數之一。亦即

$$F'(x)=f(x),\ x \text{ 在 [a,b] 上}$$

那麼

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

有了微積分基本定理第二部份以後，我們不必每次積分都在做分割、取值、求和、取極限。只要想辦法找出被積分函數的反導函數之一後，再代入上下限並相減即可。所謂「之一」意思是，x^2+7 的導函數是 $2x$，x^2-89 的導函數也是 $2x$。基本上對於任何常數 C，x^2+C 的導函數都是 $2x$。所以 $2x$ 的反導函數有無窮多個，都是 x^2+C。寫哪一個都可以，反正相減就減掉了。通常是不寫，不寫其實就是取 $C=0$ 的意思。

例題 7.2.1 $\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x$

解

由於 $\frac{x^3}{3}$ 的導函數即是 x^2，這就是說 x^2 的反導函數之一是 $\frac{x^3}{3}$。所以

$$\int_1^3 x^2 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}=} \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$$

一般而言，冪函數 x^n 的導函數爲 nx^{n-1}，反過來說，nx^{n-1} 的**反導函數** 爲 x^n 。

性質 7.2.1

對於 $n \neq -1$，x^n 的反導函數爲 $\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ 。

反導函數的用處，就是利用微積分基本定理第二部分來求出積分。

性質 7.2.2

對於 $n \neq -1$，

$$\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$$

note

$\frac{1}{x}$ 的反導函數須大學才學到，故高中尚無法處理 $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 。

微積分基本定理的第一部份

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

就好像是說，如果先將函數 f 做積分，之後再微分，就會回到 f。至於微積分基本定理的第二部份

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

則好像是說，如果先將函數 $F(x)$ 微分，之後再積分，就會回到 F。我們將此二部份合起來看，就變成了：

$$\boxed{\text{微分與積分是互逆的操作！！！}}$$

第 8 章

積分的應用

上帝才不在乎我們的數學困難，他老練地用積分在行事。

Albert Einstein

8.1 曲線間所圍面積

積分可求出有號面積，那麼若要求區域所圍面積，可分析 $f(x)$ 的正負區間，遇到負的就用減的。例如若要求由曲線 $y = x^3 + x^2 - 2x$ 與 x 軸圍成區域的面積，作出函數圖如右，得知在 -2 到 0 這範圍是正的、0 到 1 是負的。故所求爲

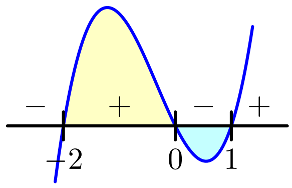


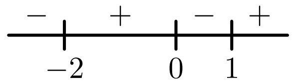
圖 8.1:

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{0} x^3 + x^2 - 2x\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} x^3 + x^2 - 2x\,\mathrm{d}x\\
=&\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Bigg|_{0}^{1}\\
=&0 - \left(4 - \frac{8}{3} - 4\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) + 0 = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}\end{aligned}$$

這樣便成功地求出曲線與 x 軸所圍區域面積。現在回頭審視剛剛的做法，我們一開始畫出函數圖形，藉此判斷正負區間，然而有些同學卻卡在不知道如何畫函數圖。做問題的時候，要明確哪些是主要目的、哪些是次要目的，哪些是藉以達成目的的手段。在這裡，畫出函數圖根本不是我們的目的，我們所需要的資訊不過是函數的正負區間，畫圖只是用來判斷正負的一種手段。要判斷正負並不一定就要畫出圖來，如果不會畫，就不要畫了！

以本例來說，其實只要分析

$$x^3 + x^2 - 2x = x\left(x^2 + x - 2\right) = x(x+2)(x-1)$$



按照高一所學，簡單分析出正負區間如右圖就好。

用更簡潔的手法來說，曲線 $y = f(x)$ 與 x 軸所圍面積和曲線 $y = |f(x)|$ 與 x 軸所圍面積根本就是一樣的！那我就可以這樣說：

性質 8.1.1 曲線與 x 軸所圍面積

曲線 $y = f(x)$ 與 x 軸、$x = a$、$x = b$ 所圍面積爲

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

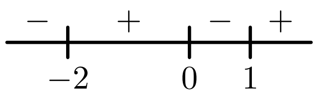
若 $f(x) = 0$ 的最小最大實根分別爲 α, β，則曲線 $y = f(x)$ 與 x 軸所圍面積爲

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

例題 8.1.1 求函數 $x^3 + x^2 - 2x$ 與 x 軸圍成區域面積。

解

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$$



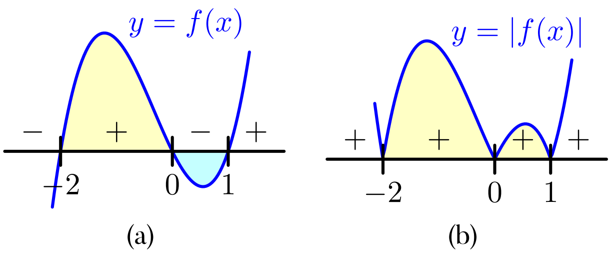


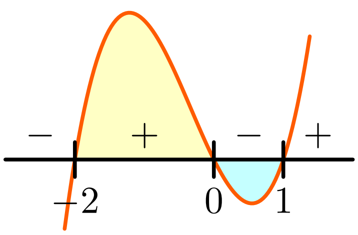
圖 8.2:

故所求爲

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{0} x^3+x^2-2x\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} x^3+x^2-2x\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Bigg|_{0}^{1} \\
&= 0-\left(4-\frac{8}{3}-4\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)+0 \\
&= \frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}
\end{aligned}
$$

note

這個函數圖形如下：



但在解題過程中是不需要畫出來的，我們需要的資訊只不過是函數取值的正負區間。

將曲線 $y=f(x)$ 與 x 軸所圍面積表爲 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$，並不只是爲了表達起來比較簡潔而已。現在，我們可以輕易地推廣到兩曲線所圍區域面積。

性質 8.1.2　兩曲線所圍區域面積

曲線 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$、$x=a$、$x=b$ 所圍面積爲

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

若 $f(x)=g(x)$ 的最小最大實根分別爲 α,β，則曲線 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 所圍面積爲

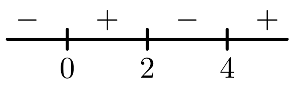
$$\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

可見，曲線 $y=f(x)$ 與 x 軸所圍面積只不過是 $g(x)=0$ 的特殊情況罷了。

例題 8.1.2 求曲線 $y=x(x-2)^2$ 與曲線 $y=2x(x-2)$ 圍成區域面積。

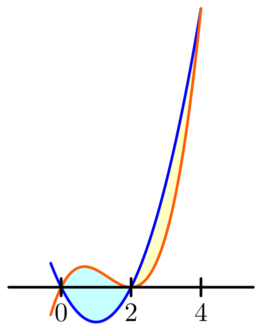
解

設 $f(x)=x(x-2)^2, g(x)=2x(x-2)$
$\Rightarrow f(x)-g(x)=x(x-2)^2-2x(x-2)=x(x-2)(x-4)$
於是可分析出正負區間如右，並知 $f(x)=g(x)$ 的最小最大實根分別爲 $0,4$。故所求爲



$$\begin{aligned}\int_0^4 \left|f(x)\right| \mathrm{d}x &= \int_0^2 x^3-6x^2+8x\,\mathrm{d}x-\int_2^4 x^3-6x^2+8x\,\mathrm{d}x\\ &=\left(\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right)\Big|_0^2-\left(\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right)\Big|_2^4\\ &=8\end{aligned}$$

許多同學會先嘗試作出兩曲線圖形如右圖，於是容易會有疑問，要如何正確作出此圖，以便列出



$$\int_0^2 x(x-2)^2-2x(x-2)\,\mathrm{d}x+\int_2^4 2x(x-2)-x(x-2)^2\,\mathrm{d}x$$

要回答此疑問亦不困難，整個問題點其實就在於，在 $(0,2)$ 區間與 $(2,4)$ 區間，分別是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 誰比較大。只要分別代個易算的內點，例如代 $x=1, x=3$ 到兩個函數，就能判定誰比較大了。然而使用上面所列解法，就根本不須要煩惱作圖問題了。但是請勿誤解我的意思，這裡並不是在說我提供的方法必然比畫圖簡便，而是說畫圖只是可用來判斷 $f(x)-g(x)$ 正負的手段之一，不要本末倒置，卡在不會畫圖。以下題爲例，若以畫圖來判斷也很快。

例題 8.1.3 求出曲線 $y=x+2$ 與曲線 $y=x^2$、y 軸、$x=1$ 所圍區域面積。

解

設 $f(x)=x+2, g(x)=x^2$，則 $f(x)-g(x)=x+2-x^2=-(x-2)(x+1)$。可知在 $[0,1]$ 區間，$f(x)-g(x)$ 是正的。所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|f(x)-g(x)\right| \mathrm{d}x &= \int_0^1 x+2-x^2\,\mathrm{d}x\\ &=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}=\frac{13}{6}\end{aligned}$$

在上一題中，若是選擇畫圖也很容易。$y=x^2$ 是我們熟悉的拋物線，$y=x+2$ 是個斜率爲正、y 截距爲 2 的直線。因此很容易畫出並判斷在區間 $[0,1]$ 直線在拋物線上方，便能正確列式。

有時候題目是換個方向，改求曲線與 y 軸所圍區域面積，而此時曲線是由 $x=g(y)$ 所確定。例如曲線 $x=y^2+1$ 與 y 軸、$y=-1$、$y=2$ 所圍面積。這與前面的問題，就只是

直接 x, y 互換而已，所以我們將 $x = g(y)$，對 y 積分，列出

$$\int_{-1}^{2} y^2 + 1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d} =} \left[\frac{y^3}{3} + y\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{8}{3} + 2\right] - \left[-\frac{1}{3} - 1\right] = 6$$

8.2 求體積

一開始介紹積分時，都說它用來求曲線下面積。但積分的用途其實很廣，並不是只能來拿求面積問題，有許多問題是一點一點地積累起來的，都可以用積分來表示。《荀子•大略》:「夫盡小者大，積微成著，...」 意思是說，微小的事物，經過長期積累，也會變得顯著。後來清朝學者李善蘭，於 1859 年翻譯中國第一本微積分教科書時，據此[1] 而使用了 「微分」、「積分」 等詞。像是求曲線弧長，$\mathrm{d}s$ 便是「微」，微小的弧長。做積分

$$\int_a^b \mathrm{d}s$$

這便是積微成著：將許多微小的弧長積出一段曲線的弧長。

同理也可以用來求體積。我們先回想求面積的狀況，若要求曲線下的面積，我們之前的作法是，切割成許多子區間，然後用許多長方形的面積和去做近似面積。接著又取極限，讓每個長方形的寬度趨近到零。對此，我們可以用口語粗略地說，我們將一條一條線去積出了面積。積分式子便是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

而其中 $f(x)$ 其實是一段長度，是曲線 $y = f(x)$ 到 x 軸的距離，在此我姑且改寫成

$$A = \int_a^b L(x)\,\mathrm{d}x$$

藉以強調我們將一條一條線的「線長函數」 $L(x)$，積出了面積來。

那麼同樣道理，一個三維的物體，我們也可以先切割成許多 「盤子」，將這些薄盤的體積加總起來，得到近似的體積。

接著再取極限，讓每個盤子的厚度趨近到零。我們可以粗略地說，我們用一個一個面，積出了體積。積分式子寫起來長這樣

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

因此，若我們能夠分析出一個物體的「截面積函數」$A(x)$，便可以將體積給積出來了。截面積函數 $A(x)$ 是代表，在 $x = 3$ 處，我們用一個垂直於 x 軸的平面與該物體相交，截出一個面，其面積就是 $A(3)$。

舉一個具體的例子，我們知道錐體的體積公式，是 $\frac{Ah}{3}$，其中 A 是底面積而 h 是高。所以圓錐的體積便是 $\frac{\pi r^2 h}{3}$，那麼底圓半徑爲 2 而高爲 4 的圓錐，按照錐體體積公式，體積爲 $\frac{1}{3} \cdot 2^2 \pi \cdot 4 = \frac{16\pi}{3}$ ，現在我們試圖用積分來驗證它。

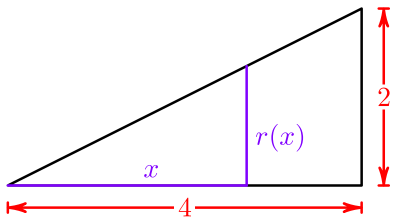
首先將圓錐的頂點設爲原點，並且讓 x 軸垂直底面。如果我們用一個個圓盤的體積來加總，便會有近似的體積。接著再取極限後，圓盤們的厚度趨近到零，變成是用一片一片的圓，它們面積積出圓錐體積。所以我們要設法寫出截面積函數 $A(x)$，這截面積函

[1]其實這只是猜測，李善蘭用詞的眞正來源沒人能確定。

數是我們用垂直於 x 軸的平面與圓錐相交，看看當 x 是某值時，所相應截出的截圓面積會是多少。而圓面積是 $r^2\pi$，所以我們可以先求截圓半徑函數 $r(x)$：不同的 x 值所對應的截圓半徑，於是 $A(x)=r^2(x)\pi$。

我們由側面往圓錐看過去，看起來是直角三角形，兩股邊分別爲圓錐的底面半徑 2 及高 4。

如右圖所分析，$r(x)$ 與 x 和圓錐側面，形成較小的直角三角形。由於相似關係，我們可以列式



$$\frac{r(x)}{x}=\frac{2}{4}$$

再經過移項處理以後，便可得到 $r(x)=\frac{1}{2}x$，於是截面積函數 $A(x)=\frac{1}{4}x^2\pi$。我們便可列出積分式

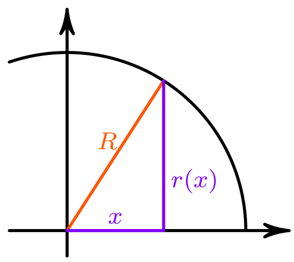
$$\int_0^4 \frac{1}{4}\pi x^2\,\mathrm{d}x$$

這樣便可以積出 $\frac{16\pi}{3}$ 來。

例題 8.2.1 請導出球體積公式。

解

設球心爲原點，半徑爲 R。垂直 x 軸的平面所截的截面也是圓，因此仍然先求 $r(x)$。根據畢氏定理，我們可知



$$r^2(x)=R^2-x^2$$

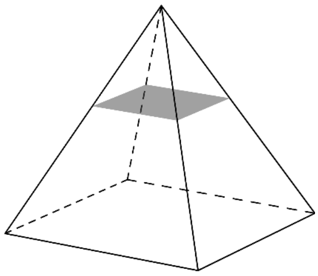
所以 $A(x)=r^2(x)\pi=\left(R^2-x^2\right)\pi$。於是

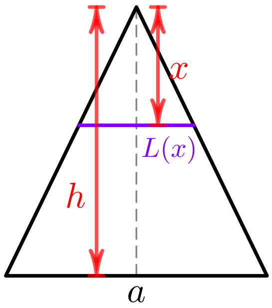
$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)\pi\,\mathrm{d}x &= \pi\int_{-R}^{R}R^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_{-R}^{R}x^2\,\mathrm{d}x\\ &=2\pi R^3-\frac{2\pi R^3}{3}=\frac{4\pi R^3}{3}\end{aligned}$$

例題 8.2.2 金字塔高 h，底面是邊長 a 的正方形。求此金字塔體積。

解

設頂端爲原點，面垂直 x 軸。垂直 x 軸的任意平面，會與金字塔截出正方形。因此寫 $A(x)=L^2(x)$，$L(x)$ 是所截出的正方形邊長。





若從側面看過去，一樣看起來是三角形。於是與前面的例子類似，利用相似關係列出

$$\frac{L(x)}{x}=\frac{a}{h}$$

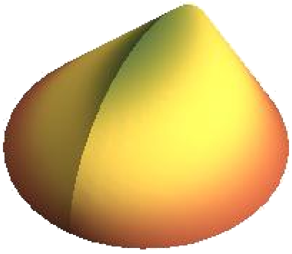
所以可得到 $L(x)=\frac{ax}{h}$，於是 $A(x)=\frac{a^2x^2}{h^2}$。接著便可列出積分式

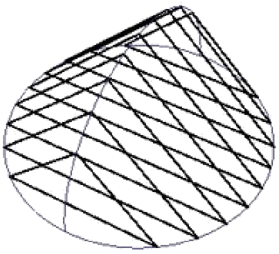
$$\int_0^h \frac{a^2x^2}{h^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a^2x^3}{3h^2}\Big|_0^h=\frac{a^2h}{3}$$

例題 8.2.3 若一物體的底面是在 $x-y$ 平面上的單位圓，垂直 x 軸的平面與此物體的截面皆爲斜邊在底面的等腰直角三角形，求此物體體積。

解

這敘述看來頗爲怪異，這個物體事實上是長這樣





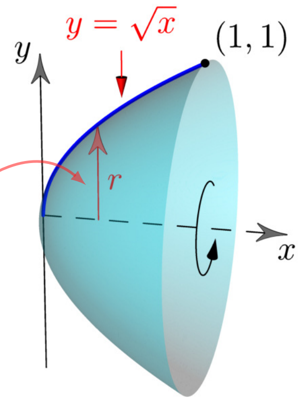
不過不知道它長相其實也沒關係，光靠題目敘述就已經有足夠資訊，知道該如何列式了。在某個 x 值處，平面與物體的底面所截長度，設爲 $L(x)$。該處與物體的截面是等腰直角三角形，所以截面積函數 $A(x)=\frac{L^2(x)}{4}$。至於 $L(x)$ 也不難求出，先寫出單位圓是 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$，馬上就知道 $L(x)=2\sqrt{1-x^2}$。所以列出積分式

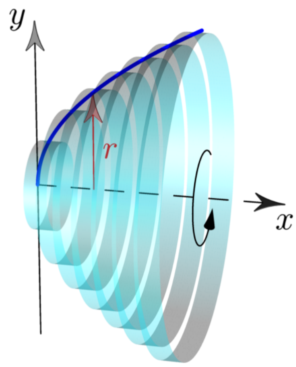
$$\int_{-1}^{1}\frac{4(1-x^2)}{4}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}1-x^2\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$$

■ 8.3　旋轉體體積

8.3.1 圓盤法

曲線 $y=\sqrt{x}$ 之下，$0\le x\le 1$。若將這段區域繞著 x 軸作旋轉，便會得到一個立體，稱之爲**旋轉體**。因爲是繞著 x 軸作旋轉，所以此時 x 軸是**旋轉軸**。若是我們拿刀以垂直旋轉軸的方向切成許多圓盤，再將這許多圓盤加起來，便可近似旋轉體體積。隨著我將圓盤的厚度越切越細（$\Delta x\to 0$），便等於利用積分的想法積出旋轉體體積，這個方法便是**圓盤法**（disk method）。





說穿了其實就是 $V=\int_a^b A(x)dx$ 的某種特例：$A(x)=r^2(x)\pi$。所以圓盤法求旋轉體體積，就是

$$V=\pi\int_a^b r^2(x)\,\mathrm{d}x$$

其實之前介紹用積分求體積時，它便已經出現了。我們將 $y=2x$ 底下，$0\le x\le 2$ 的區域，繞著 x 軸作旋轉。得到一個高爲 2，底面圓半徑 4 的圓錐。我們將 $y=\sqrt{R^2-x^2}$ 底下，繞著 x 軸作旋轉，得到球。所以當時在演示求體積時，其實已演示了圓盤法！

我們現在來看看曲線 $y=\sqrt{x}$ 之下，$0\le x\le 1$，這區域繞 x 軸所成旋轉體。現在想找出 $r(x)$，這很簡單，它就是曲線 $y=\sqrt{x}$ 到旋轉軸之間的距離。

所以，當旋轉軸就是 x 軸的時候，$r(x)$ 就是 $f(x)$，因此

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

但請不要死記此積分式，因爲只要旋轉軸不是 x 軸，譬如說 $y=f(x)$ 繞著 $y=-2$ 作旋轉，那麼 $r(x)$ 就是曲線 $f(x)$ 到旋轉軸 $y=-2$ 之間的距離 $|f(x)-(-2)|$，則積分式應該是

$$V=\pi\int_a^b r^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_a^b\Big(f(x)-(-2)\Big)^2\mathrm{d}x$$

性質 8.3.1 圓盤法

在曲線 $y=f(x)$ 之下，$x=a$ 和 $x=b$ 之間的區域，繞著 $y=c$ 作旋轉所形成的旋轉體體積爲

$$V=\pi\int_a^b r^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_a^b\big(f(x)-c\big)^2\mathrm{d}x$$

例題 8.3.1 求曲線 $y=\sec(x)$ 下，$0\le x\le \frac{\pi}{4}$ 的區域，繞 x 軸旋轉的體積。

解

$r(x)$ 就是曲線到旋轉軸的距離，故

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\overbrace{\sec^2(x)}^{r^2(x)}\,\pi}_{A(x)}\,\mathrm{d}x = \pi\tan(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi$$

這題用到了超綱的 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x)=\sec^2(x)$，對於此題只要專注在列式就可以了。

例題 8.3.2 求曲線 $x=1-y^2$ 與 y 軸所夾區域，繞 y 軸旋轉的體積。

解

現在是另一個方向轉，這樣也能用圓盤法，只要改成對 y 積分就好了，其它原則皆相同。解 $1-y^2=0$，得到 $y=\pm 1$，得知此區域的範圍是 $-1\le y\le 1$。

圓盤法是與旋轉軸垂直地切，而現在旋轉軸是鉛直線 $x=0$，所以我們現在水平地切一條線段。由於是水平地切，便知道我們是要對 y 作積分。拉出曲線到旋轉軸之間的距離，這就是 $r(y)$。於是便可列式

$$\begin{aligned}
\pi\int_{-1}^{1} r^2(y)\,\mathrm{d}y &= \pi\int_{-1}^{1}\left(1-y^2\right)^2\mathrm{d}y\\
&=2\pi\int_0^1 y^4-2y^2+1\,\mathrm{d}y \qquad \boxed{\text{偶函數}}\\
&=2\pi\left[\frac{y^5}{5}-\frac{2y^3}{3}+y\right]_0^1=\frac{26\pi}{15}
\end{aligned}$$

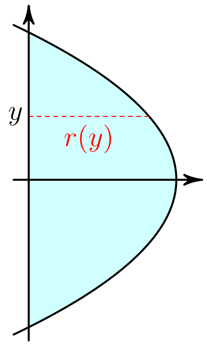


圖 8.3: $x=1-y^2$ 與 y 軸所夾區域

接下來探討一個稍微複雜一點點的狀況，真的只有一點點。如果說不是由一條曲線下的區域，而是由曲線 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 所圍成的區域，旋轉成一個旋轉體。此時雖仍可用圓盤法的想法，但我們現在切出來的，就變得不是圓盤，而是同心圓。

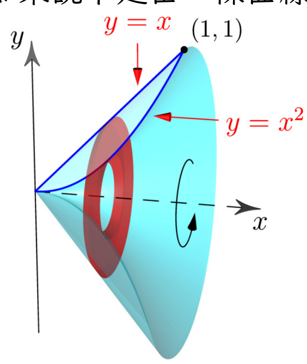


圖 8.4:

若同心圓外圈半徑 R 而內圈半徑 r，則同心圓面積爲 $\left(R^2-r^2\right)\pi$，因此 $A(x)=\left(R^2(x)-r^2(x)\right)\pi$。要找出 $R(x)$ 與 $r(x)$ 並不困難，只要看兩條曲線誰距離旋轉軸較遠，它到旋轉軸距離即是 $R(x)$；較近的那個，它到旋轉軸距離即是 $r(x)$。

這個方法，叫做 washer method。中文譯名則較雜亂，有叫圓環法，有叫墊圈法，還有叫環圈法。但在此我就不特地給它起個名字了，因爲它基本上仍是圓盤法的想法，只不過切出來不是圓盤而已，其實根本沒機會與前一個搞混，溝通上問題並不大，因此我仍以圓盤法稱之。

例題 8.3.3 在 $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$，曲線 $y = \sec(x)$ 之下曲線 $y = \tan(x)$ 之上。繞 x 軸作旋轉以後，求此旋轉體體積。

解

由於 $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}, \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$，所以即使題目沒告訴我們誰在上誰在下，我們也容易知道 [a] $\sec(x) \ge \tan(x)$。所以就可以列式

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\left(\overbrace{\sec^2(x)}^{R^2(x)} - \overbrace{\tan^2(x)}^{r^2(x)}\right)}_{A(x)} \pi \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, dx = \frac{\pi}{4}$$

[a] 不知道也沒關係，列反了只不過變負的，負的不對勁自己再換過來就好。

例題 8.3.4 由曲線 $y = \sqrt{x}$、$x = 4$ 及 x 軸所圍成的區域，分別繞 x 與 y 軸，各成一旋轉體，請求出此二旋轉體之體積。

解

繞 x 軸轉：
則視爲曲線 $y = \sqrt{x}$ 以下，$0 \le x \le 4$ 之間的區域。因此列式

$$\pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$

繞 y 軸轉：
則視爲曲線 $x = y^2$ 以上，$x = 4$ 以下 [a]，$0 \le y \le 2$ [b] 之間的區域。這樣的旋轉體，切下去的截面會是同心圓。因此列式

$$\pi \int_0^2 4^2 - (y^2)^2 \, dy = \pi \int_0^2 16 - y^4 \, dy = \pi \left[16y - \frac{y^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128}{5}\pi$$

[a] 此時已翻過來看，因此「上」是 x 較大的方向，也就是原本的右；「下」則是 x 較小的方向，也就是原本的左。

[b] 在曲線 $y = \sqrt{x}$ 上，$x = 4$ 時，對應的 y 值是 2。

8.3.2 剝殼法

除了高中數學介紹的圓盤法以外，大一微積分還介紹了剝殼法，所以以下不屬於高中範圍。

相較於圓盤法是與旋轉軸垂直地切，現在我們與旋轉軸平行地切。我們在未旋轉前就先切，然後仔細觀察其中一個子區間，發現它在旋轉以後，會形成圓柱殼。接著取極限，讓每個子區間的寬度趨近到零以後，圓柱殼就會變成圓柱面。

原本與旋轉軸垂直地切，可切出圓盤。現在我們改個方式，將旋轉體有如剝洋蔥般地，以旋轉軸爲中心由內往外剝，便剝出大小不一的圓柱面。

若一個圓柱的高是 h，圓半徑 r，則其側表面積是 $2\pi rh$，所以 $A(x) = 2\pi r(x)h(x)$。於是

$$V = \int_a^b A(x) \, dx = \int_a^b 2\pi r(x)h(x) \, dx$$

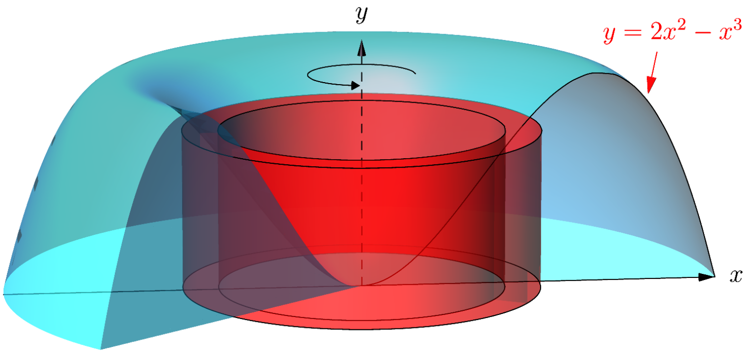


圖 8.5: 剝殼法

至於 $r(x)$ 及 $h(x)$ 該怎麼寫呢？我們將曲線 $y = f(x)$ 之下，$a \le x \le b$，這區域繞 y 軸旋轉。旋轉之前在區域上，沿著與旋轉軸平行的方向切下去，然後觀察它隨著旋轉形成圓柱。

可以看出，曲線的高 $f(x)$ 便是圓柱的高 $h(x)$；而 x 距離旋轉軸便是圓半徑 $r(x)$。所以此時

$$\int_a^b 2\pi r(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x$$

性質 8.3.2　剝殼法

在曲線 $y = f(x)$ 之下，曲線 $y = g(x)$ 之上，$x = a$ 和 $x = b$ 之間的區域，繞著 $x = d$ 作旋轉所形成的旋轉體。其體積爲

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b r(x)h(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_a^b |x-d|\,|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

例題 8.3.5 曲線 $y = x^2$ 與 $y = 2x$ 所圍區域，繞 y 軸作旋轉，求此旋轉體體積。

解

先解 $x^2 = 2x$，得到 $x = 0$ or 2，得知此區域的範圍是 $0 \le x \le 2$。簡單畫圖可知 $y = 2x$ 在上，$y = x^2$ 在下。不畫圖也知道，在 0 到 2 中間隨便抓一個來代，譬如說抓 $x = 1$ 代代看，很容易就知道 $y = 2x$ 在上，$y = x^2$ 在下。

同樣地，跟旋轉軸平行的方向是鉛直方向，因此在此區域上畫鉛直線切過它。可以看出 $h(x)$ 就是 $\left|2x - x^2\right|$，因爲兩曲線間並沒有交換大小關係，所以若不加絕對值也沒問題。至於 $r(x)$ 就是 x 到旋轉軸的距離，而旋轉軸是 y 軸，即 $x = 0$，故可知

$r(x)=|x-0|=x$ 。於是列式

$$\begin{aligned}&2\pi\int_0^2 x(2x-x^2)\,\mathrm{d}x\\=&2\pi\int_0^2 2x^2-x^3\,\mathrm{d}x\\=&2\pi\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2\\=&2\pi\left[\frac{16}{3}-4\right]=\frac{8\pi}{3}\end{aligned}$$

■ 8.4 利用積分定義解極限

數學就是那麼巧妙，我們使用 lim 來定義定積分，有時候卻又可以利用定積分來解極限！例如：

$$\int_1^2 x^5\,\mathrm{d}x=\frac{2^6-1^6}{6}=\frac{21}{2}$$

根據積分的定義寫等差分割、每個子區間取最右端：

$$\int_1^2 x^5\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2-1}{n}\cdot i\right)^5\left(\frac{2-1}{n}\right)=\frac{21}{2}$$

化簡一下爲

$$\int_1^2 x^5\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^6}\sum_{i=1}^{n}(n+i)^5=\frac{21}{2}$$

原本我們看到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^6}\sum\limits_{i=1}^{n}(n+i)^5$，很可能會束手無策。但現在根據定積分的定義，我知道它就是 $\int_1^2 x^5\,\mathrm{d}x$，又知道這個積分的值是 $\frac{21}{2}$，那我就知道原來那個極限值是 $\frac{21}{2}$ 了！

說是這麼說，但我也是從 $\int_1^2 x^5\,\mathrm{d}x$ 出發去按照積分定義寫，才寫出這個極限的。若是一開始就看到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^6}\sum\limits_{i=1}^{n}(n+i)^5$，該如何認出它是 $\int_1^2 x^5\,\mathrm{d}x$ 呢？分析如下：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^6}\sum_{i=1}^{n}(n+i)^5=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n+i}{n}\right)^5$$

因爲 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$，我當然在外面留 $\frac{1}{n}$，其餘的丟進 $\sum$ 內。另一方面來說，因 $\sum$ 內是 $(***)^5$，那我丟個五次方進去也非常合理。現在看著那個 $\frac{n+i}{n}$，當 $i=1$，這是 $\frac{n+1}{n}$，$n\to\infty$ 後它趨近到 1；當 $i=n$，這是 $\frac{n+n}{n}=2$ 。這樣我就知道，如果我說那一整個 $\frac{n+i}{n}$ 是變數 x，那麼積分範圍是從 1 到 2。有了範圍 1 到 2，這樣每個子區間寬度就是 $\Delta x=\frac{2-1}{n}=\frac{1}{n}$ 。又可知 $x_i=x_0+i\cdot\Delta x=a+\frac{i}{n}=1+\frac{i}{n}$ 。分析至此便明顯設 $f(x)=x^5$，有

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^5\,\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^5\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n+i}{n}\right)^5\end{aligned}$$

例題 8.4.1 求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^7+2^7+\cdots+n^7}{n^8}$ 。

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1^7+2^7+\cdots+n^7}{n^8} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^8}\sum_{i=1}^{n} i^7\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^7 \qquad \boxed{外面保留\ \frac{1}{n}}\\ &= \int_0^1 x^7\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

若將 $\frac{i}{n}$ 看成 x，當 $i=1$，$x=\frac{1}{n}\to 0$；當 $i=n$，$x=\frac{n}{n}=1$ 。所以被積分函數可看成 x^7，積分範圍 0 到 1，於是所求爲 $\int_0^1 x^7\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}$ 。

這裡總結一下把極限轉換爲定積分的流程：

1. $\sum$ 的外面保留 $\dfrac{c}{n}$，那麼它很有可能直接等於子區間寬度 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，但也可能是 Δx 的常數倍。

   就是說，分母須爲 n 的一次。如果沒有，要從 $\sum$ 裡面拉出來；如果次方過大，要把多於一次方的其餘部分丟進 $\sum$ 裡面。

   Δx 的分子並不一定是 1，當然，畢竟積分範圍的全長也不一定是 1。只是平常做題的時候經常看見分子是 1、積分範圍 0 到 1，但實際上並不總是如此。

2. 識別並轉換變量形式。

   在 $\sum$ 內部，尋找機會寫出含 $\dfrac{i}{n}$ 或 $a+\dfrac{i}{n}$ 的這類形式。這有助於搭建離散與連續之間的橋樑。

   實際上應該是 $a+\dfrac{i}{n}(b-a)$，但我怕這樣寫看起來太複雜。可以先用上述形式理解，解題過程再判斷 $\dfrac{i}{n}$ 是否有必要再乘上什麼。參考第92頁的示範。

3. 確定積分範圍。

   當事情從離散跨越到連續（也就是 $n\to\infty$ 之後），$\dfrac{i}{n}$ 或 $a+\dfrac{i}{n}$ 便趨向 x 了。此時通過觀察轉換後的變量形式和枚舉 i 的值，確定 x 的範圍（也就是積分範圍）。

   值得注意的是，最外面所保留的 $\dfrac{c}{n}$，其分子常常直接等於積分範圍全長（但不必然），所以這裡也是重要的參考。

4. 寫出定積分形式。

   最後，將上述發現整合成定積分的形式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$。

我們再來看一道 2019 AP Calculus BC 的題，可以很好地練習使用上述步驟。

例題 8.4.2 For what value of b does the integral $\displaystyle\int_1^b x^2\,\mathrm{d}x$ equal $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$?

(A) $b=2$ only (B) $b=3$ only

(C) b could be any real number

(D) There is no such value of b

b 取何值可使得定積分 $\displaystyle\int_1^b x^2\,\mathrm{d}x$ 的值與 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$ 相等？

(A) 只能 $b=2$ (B) 只能 $b=3$

(C) b 可爲任意實數

(D) 無解

解

$\Delta x=\dfrac{b-1}{n}$，而最外面目前有個 $\dfrac{2}{n}$，那麼很有可能積分範圍的全長就是 2，則 $b-1=2 \quad\Rightarrow b=3$ 。

這就秒殺了？我們做點確認：當 $n\to\infty$，$\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)^2\to x^2$。$k=1\Rightarrow 1+\dfrac{2}{n}\to 1$，這對應 $x=1$；$k=n\Rightarrow 1+\dfrac{2n}{n}\to 3$，這對應 $x=3$。

確認完畢，b 的值確實是 3，所以選 (B)。

87

第 9 章

歷屆大考題選解

人具上資而意理疏莽，即上資無用；人具中才而心思縝密，即中才有用；能通幾何之學，縝密甚矣。

徐光啟

例題 9.0.1 請選出正確的選項。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{6^n+7^n}=0$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=1$

103 數乙

解

(1)(2) ○ 因 $|r|<1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$

(3) ○ 上下同除以 7^n $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n-\left(\frac{3}{7}\right)^n}{\left(\frac{6}{7}\right)^n+1}=0$

(4) ○ 上下同除以 n^3 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(5) × 上下同乘以 $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

例題 9.0.2 當 n 爲正整數時，令 $x=a_n$，$y=b_n$，$z=c_n$ 爲三元一次聯立方程式

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ -2nx+ny+3z=8n \end{cases}$$

之唯一解，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ______ 。

99 數甲

解 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2n & n & 3 & 8n \end{array}\right] \xrightarrow[R_3+2nR_1]{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3n & 3+2n & 8n \end{array}\right] \xrightarrow[R_1-R_2]{R_3-3nR_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-4n & 8n \end{array}\right]$$

可解出 $x=z=\frac{8n}{3-4n}$，故所求爲 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n}{3-4n}=-2$ 。

解 2

由前兩式 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$ $\Rightarrow x:y:z=1:-2:1$

$\Rightarrow$ 設 $x=z=t, y=-2t$，代入第三式得 $-2nt-2nt+3t=8n$

$\Rightarrow t=\frac{8n}{3-4n}=x$ 。

解 3

由克拉馬公式

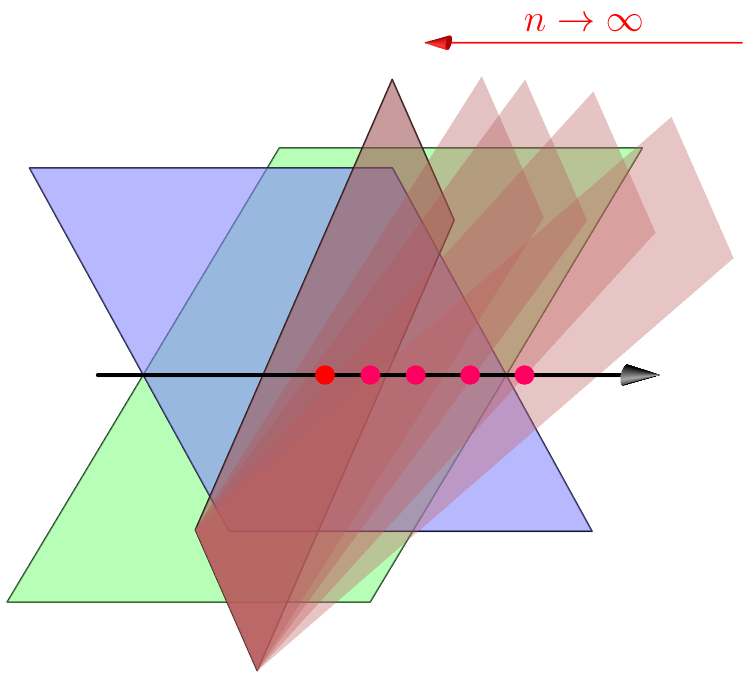
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 8n & n & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2n & n & 3 \end{vmatrix}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n}{3-4n} = -2$$

解 4

所求爲三平面交點之 x 坐標取 $n\to\infty$ 後的極限，等同於先對於第三個平面取 $n\to\infty$ 後得到極限平面，拿來與前兩平面求交點。即：

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}(a_n, b_n, c_n) \\ =& \lim_{n\to\infty} E_1 \cap E_2 \cap E_{3,n} \\ =& E_1 \cap E_2 \cap \left(\lim_{n\to\infty} E_{3,n}\right) \end{aligned}$$

故先將第三個平面整理成 $E_{3,n}: 2x - y - \frac{3}{n}z = -8$，則 $\lim_{n\to\infty} E_{3,n} = E_3: 2x - y = -8$ 。接著再解 E_1, E_2 及 E_3 三平面交點之 x 坐標，可得 -2 。



例題 9.0.3 假設兩數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$，對所有正整數 n 都滿足 $b_n+\dfrac{4n-1}{n}<a_n<3b_n$ 。已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=6$，試選出正確的選項。

(1) $b_n<6-\dfrac{4n-1}{n}$

(2) $b_n>\dfrac{4n-1}{2n}$

(3) 數列 $\langle b_n\rangle$ 有可能發散

(4) $a_{10000}<6.1$

(5) $a_{10000}>5.9$

111 分科數甲

解

(1) × 首先移項成 $b_n+\dfrac{4n-1}{n}<6$，爲了方便，設左式 $b_n+\dfrac{4n-1}{n}=c_n$。

題目條件給了 $c_n<a_n$ 對所有正整數 n 恆成立，又說 a_n 趨向 6。選項的意思是：那麼 c_n 肯定是每一項都小於 a_n 的極限值嗎？

這樣看很明顯是不對的，我 c_n 每一項都比你 a_n 小，這和我與你 a_n 的極限值之間大小關係有什麼關聯？

有可能 a_n 是一路嚴格遞減地趨向 6，比方說 a_n 前幾項是 $a_1=10, a_2=8, a_3=6.7, a_4=6.2$，那我的 c_1,c_2,c_3 也完全可以取值爲某些比 6 略大的數。

(2) ○ 我們觀察大小關係的最左與最右，並開始移項：

$$b_n+\frac{4n-1}{n}<3b_n$$
$$\frac{4n-1}{n}<2b_n$$
$$\frac{4n-1}{2n}<b_n$$

(3) × 將 $b_n+\dfrac{4n-1}{n}<a_n$ 移項成 $b_n<a_n-\dfrac{4n-1}{n}$、引用 (2) 的正確結論 $b_n>\dfrac{4n-1}{2n}$，可得

$$\frac{4n-1}{2n}<b_n<a_n-\frac{4n-1}{n}$$

由於 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-1}{2n}=\dfrac{4}{2}=2$、$\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\dfrac{4n-1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-1}{n}=6-4=2$，故由夾擠定理，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$

(4)(5) ×

數列 a_n 最終趨向 6，但這過程中的行爲很難說。

這兩選項的意思是第 1000 項肯定會與極限值差距在 0.1 之內 [a]，但我有可能收斂速度是很慢的，以至於即使已經第 1000 項了仍然與 6 有著還不小的差距。

具體的反例可以設 $a_n = 6 + \frac{5000}{n}$ 及 $a_n = 6 - \frac{5000}{n}$，則 $a_{1000} = 11$ 或 1，這就分別反駁了 (4) 和 (5)。

[a]意思不完全一樣，我說的這意思應該寫成 $|a_n - 6| < 0.1$。但按我這樣理解也無妨，反正都能反駁掉。

例題 9.0.4 設 a, b 爲實數，$f(x)$ 爲 5 次實係數多項式且其最高次項係數爲 a。若 $f(x)$ 滿足 $\int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}(x^2+4x+5)^3 - \frac{3}{2}$，則 $a =$ ______，$b =$ ________ 。

104 數甲

解

note

鏈鎖律並不在 99 課綱內，所以使用鏈鎖律求解在當年不是一個合格的解答（學生可以寫，老師不能這樣寫解答給學生）。

等號右邊展開後爲（只看最高次項）$\frac{3}{2}x^6 + \cdots$，接著等號兩邊同時求導，得到 $f(x) = 9x^5 + \cdots$，故 $a = 9$ 。

原條件式等號兩邊代 $x = b$，得到

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{3}{2}(b^2+4b+5)^3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\left[(b^2+4b+5)^3 - 1\right] \\
&\Rightarrow (b^2+4b+5)^3 = 1 \\
&\Rightarrow b^2+4b+5 = 1 \quad \Rightarrow b = -2
\end{aligned}
$$

例題 9.0.5 試問極限

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}\left(\sqrt{4n^2+9\times 1^2} + \sqrt{4n^2+9\times 2^2} + \cdots + \sqrt{4n^2+9\times(n-1)^2}\right)
$$

的值可用下列哪一個定積分表示？

(1) $\int_0^3 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$　(2) $\int_0^3 \sqrt{1+9x^2}\,\mathrm{d}x$　(3) $\int_0^3 \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$

(4) $\int_0^3 \sqrt{4+9x^2}\,\mathrm{d}x$　(5) $\int_0^3 \sqrt{4x^2+9}\,\mathrm{d}x$

112 分科數甲

解

最外面分母 n 的次方超過 1 了，把一次方扔進去：

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}\left(\sqrt{4n^2+9\times 1^2} + \sqrt{4n^2+9\times 2^2} + \cdots + \sqrt{4n^2+9\times(n-1)^2}\right)
$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left(\sqrt{4+9\times(\frac{1}{n})^2}+\sqrt{4+9\times(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\sqrt{4+9\times(\frac{n-1}{n})^2}\right)$$

每個選項的積分範圍都是 0 到 3，那麼 Δx 也就直接確認就是 $\frac{3}{n}$。

根號內是 $4+9(\frac{i}{n})^2$ 的形式，其中 i 的變化範圍是從 1 開始，逐項累加 1，直到 $n-1$。這樣看的話暫時還不是很符合，因爲此處看起來像是 $\Delta x = \frac{1}{n}$。

因此我們再一步，把 9 扔進平方內：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left(\sqrt{4+9\times(\frac{1}{n})^2}+\sqrt{4+9\times(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\sqrt{4+9\times(\frac{n-1}{n})^2}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left(\sqrt{4+(3\cdot\frac{1}{n})^2}+\sqrt{4+(3\cdot\frac{2}{n})^2}+\cdots+\sqrt{4+(3\cdot\frac{n-1}{n})^2}\right)
\end{aligned}$$

這樣，將 $3\cdot\frac{i}{n}$ 看成 x，則 $\Delta x = \frac{3}{n}$，子區間寬度的部分沒毛病；當 $i=1$，$(3\cdot\frac{1}{n})^2 \to 0$，這對應 $x=0$；當 $i=n-1$，$(3\cdot\frac{n-1}{n})^2 \to 3\cdot 1 = 3$，這對應 $x=3$。

做好確認了，$3\cdot\frac{i}{n}$ 的部分在 $n\to\infty$ 之後變爲 x。所以此極限轉換爲定積分 $\int_0^3 \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$，選 (3)。

例題 9.0.6 設 $F(x)=\int_{-1}^{x}\left(2t^{100}+3t^{10}-1\right)\mathrm{d}t$，試求 $\lim_{x\to-1}\frac{F(x)}{x+1}$。

解 1

如果超綱地使用羅必達：首先微積分基本定理使我們確定 $F(x)$ 是可導的，則

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-1}\frac{F(x)}{x+1}\\
\overset{L}{=}&\lim_{x\to-1}\frac{F'(x)}{1}=\lim_{x\to-1}F'(x)\\
=&\lim_{x\to-1}2x^{100}+3x^{10}-1 \qquad \boxed{\text{微積分基本定理}}\\
=&2\cdot(-1)^{100}+3\cdot(-1)^{10}-1=2+3-1=4
\end{aligned}$$

解 2

爲了避免使用羅必達，這裡須湊導數定義。

首先注意 $F(-1)=\int_{-1}^{-1}\left(2t^{100}+3t^{10}-1\right)\mathrm{d}t=0$（積分上下限爲相同數字），於是

$$\lim_{x\to -1}\frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}$$ 分子補減零不影響值、分母按照導數定義改寫

$$=F'(-1)$$

$$=2x^{100}+3x^{10}-1\Big|_{x=-1}$$

$$=2\cdot(-1)^{100}+3\cdot(-1)^{10}-1=2+3-1=4$$

例題 9.0.7 設 $f(x)$ 爲實係數多項式函數，且 $xf(x)=3x^4-2x^3+x^2+\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 對 $x\ge 1$ 恆成立。試回答下列問題。

(1) 試求 $f(1)$。

(2) 試求 $f'(x)$。

(3) 試求 $f(x)$。

(4) 試證明恰有一大於 1 的實數 a 滿足 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=1$。

108 數甲

解 1

(1) 代 $x=1$：

$$1\cdot f(1)=3-2+1+\underbrace{\cancel{\int_1^1 f(t)\,\mathrm{d}t}}_{0}$$

$$\Rightarrow f(1)=2$$

(2) 等號兩邊同時對 x 求導：

$$\cancel{f(x)}+xf'(x)=12x^3-6x^2+2x+\cancel{f(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x)=12x^2-6x+2$$

(3) 由 $f'(x)=12x^2-6x+2$ 可得 $f(x)=4x^3-3x^2+2x+C$，再由 $f(1)=2$ 可得 $C=-1$，故 $f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$。

(4) ① 代 $x=0$：

$$0\cdot f(0)=\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

② 設 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$。

- 由 ① 可知 $F(1)=0$

- $f(x)$ 之領導係數爲正，故 $F(x)$ 之領導係數亦爲正，則 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 。因此存在比 1 大的數 k 使得 $F(k)=1$
- 當 $x\geq 1$ ，

$$\begin{aligned}F'(x)=f(x)&=4x^3-3x^2+2x-1\\&=x^2(4x-3)+(2x-1)\\&\geq 1^2\cdot(4-3)+(2-1)>0\end{aligned}$$

故 $F(x)$ 在 $x\geq 1$ 爲嚴格遞增，因此 $F(x)=1$ 不存在第二個大於 1 的實數解。

由以上討論，$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=1$ 恰有一個大於 1 的實數解，即爲所欲證。

解 2

代 $x=0$：

$$\begin{aligned}0\cdot f(0)&=\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t\\ \Rightarrow \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t&=0\end{aligned}$$

設 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 爲連續函數，$F(1)=0$ 。當 $x\geq 1$ ，

$$\begin{aligned}f(x)&=4x^3-3x^2+2x-1\\&=x^2(4x-3)+(2x-1)\\&\geq 1^2\cdot(4-3)+(2-1)>1\end{aligned}$$

可知當 $x\geq 1$ ，被積分函數 $f(x)$ 恆正，$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 嚴格遞增；$f(x)$ 恆大於 1 ，$\lim\limits_{x\to\infty} F(x)\geq \lim\limits_{x\to\infty}\int_1^x 1\,\mathrm{d}t=\infty$ 。故由連續函數的勘根定理知恰有一大於 1 的實數 a 滿足 $F(a)=1$ ，即爲所欲證。

note

題目要我們證明「恰有一個」，我們須就存在性（有）及唯一性（不會有第二個）分別說明。

例題 9.0.8 設 f 爲一實係數多項式函數。

(1) 設 $\langle a_n\rangle$ 爲一數列，其中 $a_n=\dfrac{f(n)}{n^4}$。若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$，試求 f 的次數與最高次項係數。

(2) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$，試求 f 的函數圖形在 $x=2$ 時的切線方程式。

(3) 若 f 滿足上面 (1) 與 (2) 的假設，且 $f''(0)=2$，試求 $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 之值。

解

(1) 若 $\deg f(x) > 4$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^4}$ 不存在；若 $\deg f(x) < 4$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^4} = 0$。故 $\deg f(x) = 4$，設 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$，

$$\begin{aligned} 5 &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^4} \\ &= \lim_{n\to\infty} a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \frac{e}{n^4} = a \end{aligned}$$

故 f 的最高次係數爲 5。

(2) 多項式函數爲連續函數，故

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 3 \cdot 0 = 0$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$$

故 f 函數圖形在 $x = 2$ 時的切線方程式 $y = 3x$。

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ f'(x) &= 20x^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\ f''(x) &= 60x^2 + 6bx + 2c \end{aligned}$$

結合 (1)、(2) 結論及 (3) 的條件：

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \quad \Rightarrow e = 0 \\ f'(0) &= 0 \quad \Rightarrow d = 0 \\ f''(0) &= 2 \quad \Rightarrow c = 1 \end{aligned}$$

因奇函數在 $[-1, 1]$ 上積分必爲 0，

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} 5x^4 + x^2\,\mathrm{d}x = \left(x^5 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

例題 9.0.9 坐標平面上，x 坐標與 y 坐標皆爲整數的點稱爲「格子點」。設 n 爲正整數，已知在第一象限且滿足 $x+2y \le 2n$ 的格子點 (x,y) 的數目爲 a_n。則 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ 的值爲下列哪一個選項？

(1) 0　(2) 1　(3) $\frac{4}{3}$　(4) 2　(5) 4

104 數乙

解 1

$$\begin{aligned}a_n &= 1+1+2+2+3+3+\cdots+(n-1)+(n-1)\\ &= 2\cdot\frac{(n-1)n}{2} = n(n-1)\\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2} = 1\end{aligned}$$

解 2

在 $(0,0),(0,n),(2n,0),(2n,0)$ 圍成的長方形中，簡單估算其格子點數目大約爲 $n\cdot(2n) = 2n^2$ 個。除以 2 以後得到 n^2，不等於但很接近 a_n，誤差頂多是 n 的一次式。換句話說，$a_n = n^2+bn+c$。因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+bn+c}{n^2} = 1$，故選 (2)。

第 10 章 進階題材

由是，一切曲線、曲線所函面、曲面、曲面所函體，昔之所謂無法者，今皆有法；昔之視爲至難者，今皆至易。嗚呼！算術至此觀止矣，蔑以加矣。

清代數學家李善蘭

10.1 三角函數的導函數

前面探討了冪函數的導函數：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$。現在來推導三角函數應該如何求導，要用利用導數的定義來操作，這就涉及到在第 26 頁介紹的一個重要極限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$。

性質 10.1.1　三角函數的導函數

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x)$　　(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x)$

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \sec^2(x)$　　(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot(x) = -\csc^2(x)$

(5) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec(x) = \tan(x)\sec(x)$　　(6) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc(x) = -\cot(x)\csc(x)$

證

(1)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h} && \boxed{\text{和角公式}}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\cdot\cos(x)+\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}\cdot\sin(x)\\ &= \lim_{h\to 0}1\cdot\cos(x)+0=\cos(x)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1) && \boxed{\text{鏈鎖律}}\\ &= -\sin(x)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right]\\ &= \frac{\big(\sin(x)\big)'\cos(x)-\sin(x)\big(\cos(x)\big)'}{\cos^2(x)} && \boxed{\text{商法則}}\\ &= \frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\big(-\sin(x)\big)}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

$$= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

■

例題 10.1.1 已知某運動中物體的位置函數爲 $s(t) = A\sin(\omega t)$ （A,ω 爲常數），求其加速度函數並驗證

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}s + \omega^2 s = 0$$

解

速度函數

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = A\omega\cos(\omega t)$$

加速度函數

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}s = -A\omega^2\sin(\omega t)$$

故

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}s + \omega^2 s = -A\omega^2\sin(\omega t) + \omega^2 A\sin(\omega t) = 0$$

10.2 重要極限

10.2.1 重要極限一：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ 被稱爲重要極限，不光是因爲它是推導三角函數的導函數必備知識，事實上有許多涉及三角函數的極限都可以技巧地與它牽扯上關係，從而解決問題。這當中比較簡單的是透過變數代換，請見下面例題。

例題 10.2.1 求極限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}$

解這

與重要極限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ 實在是太像了！直接設 $t = x-1$：

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1 \end{aligned}$$

例題 10.2.2 求極限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}$

解

如果你對於重要極限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ 的理解是：分子 sin 內部是無窮小、分母也是無窮小，則極限值是 1。這種訴諸直觀而缺乏嚴謹的看法，就會害你誤以爲此題答案也是 1。

正確做法是「利用已知解決未知」：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3\\ =&1\cdot 3=3\end{aligned}$$

由於 sin 內部須與分母一致，所以需要先將分母對齊 sin 內部：$\dfrac{\sin(3x)}{3x}$。對齊了以後要把分母憑空多出的 3 給平衡回來，所以後面補乘 3。

例題 10.2.3 求極限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$

解

同樣是對齊、平衡的流程：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin(5x)}\cdot\frac{3}{5}\\ =&1\cdot 1\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

在對齊的過程中，分母多出了 3、分子多出了 5，所以下一步在後面乘上 $\dfrac{3}{5}$ 以平衡回來。

● 10.2.2 重要極限二：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$

歐拉數的定義 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ 也被認爲是重要極限之一，我們來看幾題與其相關的極限。

例題 10.2.4 求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{P}{n}\right)^n$

解

依然是「利用已知解決未知」。在已知的重要極限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ 當中，我們注意到分式 $\frac{1}{n}$ 的分子是 1。此題的分子則不是 1，「利用已知解決未知」的關鍵技巧就是如何「化未知爲已知」，既然眼前分子不是 1，我就動手使其成爲 1：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(1+\frac{P}{n})^n\\=&\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{n}{P}})^n\end{aligned}$$

這樣，解決了分式的分母須爲 1 的問題。但又產生了新的問題：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n n=e$ 我上色的地方，也就是分式的分母 與外面次方的部分，須爲一致的。

所以我繼續對齊、平衡的流程：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{n}{P}})^n\\=&\lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{1}{\frac{n}{P}})^{\frac{n}{P}}\right]^P\end{aligned}$$

次方爲了與分式的分母對齊，從 n 改寫成 $\frac{n}{P}$，等於是憑空除以 P。所以要多乘回來。由於 $(a^b)^c=a^{bc}$，所以多乘回來的方式可以採用把整個式子給 P 次方。

現在注意中括號內整個式子，已經完美對齊 e 的定義了（你可以設 $t=\frac{n}{P}$），所以極限答案爲 e^P。

例題 10.2.5 求極限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$。

解

首先考慮右極限

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}\\=&\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y && \boxed{\text{設 } y=\frac{1}{x}}\\=&e\end{aligned}$$

至於左極限

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}\\=&\lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} && \boxed{\text{設 } y=-\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} \\
&= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} && \boxed{a^{-x}=\frac{1}{a^x}} \\
&= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y} \\
&= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} \\
&= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right) \\
&= e\cdot 1 = e
\end{aligned}
$$

實際上，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 正是 e 的另一個定義！也就是說，$e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$。

例題 10.2.6 求極限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$。

解

在第15頁，介紹過 $\ln x = \log_e x$。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x) \\
&= \lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) && \boxed{\text{對數的運算律}} \\
&= \ln\Big(\underbrace{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{e}\Big) = \ln e = 1
\end{aligned}
$$

例題 10.2.7 求極限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$。

解

首先設 $y=e^x-1$，於是 $e^x=y+1$，兩邊取 ln 得到 $x=\ln(y+1)$。當 $x\to 0$，$e^x\to 1$，即 $y\to 0$，所以轉換為

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}$$

這正是上一題的倒數，所以也是 1。

例題 10.2.8 求極限 $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$ 。

解

設 $y=2^x-1 \Rightarrow 2^x=y+1 \Rightarrow x=\log_2(y+1)=\frac{\ln(y+1)}{\ln 2}$ (換底公式)，則

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} &= \lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{\ln(y+1)}{\ln 2}} \\ &= \ln 2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}=\ln 2\end{aligned}$$

由上一題經驗，我們可得出結論

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a) \quad (a>0, a\neq 1) \tag{10.1}$$

10.3 自然指數與自然對數的導函數

性質 10.3.1

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x=e^x$　　(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x=\frac{1}{x}$

證

(1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

此時，我們設 $y=e^h-1$，於是 $e^h=1+y$ 。接著等號兩邊都同取自然對數，$h=\ln(1+y)$ 。當 $h\to 0$ 時，$y\to 0$ 。所以接下來是

$$e^x\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}$$

回想一下前面有做過 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$，這是因爲

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(e)=1$$

所以 $\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\frac{1}{1}=1$ 。最後就是

$$e^x\cdot 1=e^x$$

因此做出 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x=e^x$ 。

(2)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \qquad \boxed{\text{對數相減等於裡面相除}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

故意將式子湊成那個樣子，就是想故技重施，再用一次 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$。所以設 $y=\frac{h}{x}$，當 $h\to 0$，$y\to 0$。就變成

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot\frac{1}{x}=1\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

所以 $\ln(x)$ 的導函數就是 $\frac{1}{x}$。 ■

10.4 羅必達法則

10.4.1 羅必達法則的使用介紹

當我們遇到某些極限的問題，例如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7+\frac{1}{n}}{2^n}$，只須觀察到分母趨近到無限大、分子趨近到有限的數 7，便可知道整個數列是趨近到 0。但遇到某一類的問題，例如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{n^3-5n}$ 或是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$，我們並不能光是觀察分母與分子同時趨近到無限大 $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$，或同時到零 $\left(\frac{0}{0}\right)$，藉以直接得知結果。舉一點例子來說，同樣是 $\frac{0}{0}$，就有以下各種結果

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+3x}{x}=4 \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3-3x^2+3x-1}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x\sin(\frac{1}{x})} \quad \text{不存在}$$

這一類的就叫**不定式**，光看形式是無法直接確認結果。考試中通常都會拿不定式考你，否則就太過簡單了。在一開始學求極限時，我們通常用的手法是因式分解、反有理化或是夾擠定理來解。但仍然會有許多題目較難應付，譬如說

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$$

就不是那麼容易[1]。現在便要介紹解決此種困境的一個利器，**羅必達法則**。

[1]事實上可以上下同乘以 $\cos(x)$ 之後，利用半角公式及 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ 來解出。

定理 10.4.1 羅必達法則

若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 都在 a 點的附近可導，不必包含 a 點本身。且 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ 或是 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$。則若

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

便可推論

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

其中 L 可爲 $\pm\infty$。

例題 10.4.1 求極限 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$。

解

確認 $\frac{\sin(x)}{x}$ 是不定式 $\left(\frac{0}{0}\right)$，於是上下各自求導，得到 $\frac{\cos(x)}{1}$。因爲

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

所以原極限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

請注意，上一題這樣寫，其實只是演示一次給你看而已。實際上如果在考試的時候，是不可以這樣寫的！

這個方法需要將 $\sin(x)$ 求導得到 $\cos(x)$，但我們怎麼知道 $\sin(x)$ 的導函數是 $\cos(x)$ 呢？就是必須使用導數的定義

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

這樣作下去，過程中就必須使用到

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

才有辦法得到結果是 $\cos(x)$。這樣便形成了循環論證，我們必須先知道 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$，才能知道 $\sin(x)$ 導函數是 $\cos(x)$。然後又用 $\sin(x)$ 導函數是 $\cos(x)$ 這件事來計算出 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$，有如女兒把老媽生了出來。所以遇到這一題時，我們還是要乖乖地用夾擠的方法寫！

另一件須注意的事情是，請好好看清楚羅必達法則的敘述邏輯。是須先

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

才能推論到

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

而不是說這兩個必然會同時存在，我們不能反過來作推論。舉一例子，我們知道

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x)}{x}=1$$

它也是不定式沒錯，但上下各自求導以後得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos(x)}{1}$$

這個極限不存在！並非 1！所以原極限與上下求導後的極限，不可以說是相等，應該說後者先存在以後，才保證前者也存在，並且兩者極限值相等。(或者同為正負無窮大)

因此，我建議在寫算式的時候，如果你使用了羅必達法則，不要純粹寫個等號，因為原極限與上下求導以後的極限不見得相等。最好在等號上面寫個 L，表示你在這裡使用了羅必達法則（L'Hôpital's rule）。你只是因為上下求導以後有求出極限值，才使得你也知道原極限值與之相等。另一個好處是，這樣寫也給閱卷者方便，知道你做了什麼事變成那樣。要記住，給閱卷者方便就是給你自己方便！

例題 10.4.2 求極限 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$。

解

此題為不定式，因此

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}\overset{L}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2x}{1}=\frac{2}{1}=2$$

例題 10.4.3 求極限 $\lim_{x\to 0}\cot(x)-\frac{1}{x}$。

解

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\cot(x)-\frac{1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}\\
&\overset{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos(x)}-x\sin(x)-\cancel{\cos(x)}}{\sin(x)+x\cos(x)}\\
&\overset{L}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-x\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)}=\frac{0}{2}=0
\end{aligned}$$

像這樣答案就出來了。不過平時練習，千萬要反復審視自己的作答，除了讓自己熟習基本運算之外，也看看是否那邊有不必要的過程、可以如何簡化。以這題來說，也可以不要做第二次羅必達，寫成

$$\lim_{x\to 0}-\frac{x\sin(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin(x)}{\frac{\sin(x)}{x}+\cos(x)}=-\frac{0}{1+1}$$

10.4.2 羅必達法則的誤用探討

羅必達法則雖是利器，但並不是萬用丹，並非什麼極限問題都能用羅必達解決。它甚至是雙面刃，羅必達法則其實有許多應注意的點，以下便整理大家經常犯的錯，這些會害你在考試被扣分！

1. 羅必達法則是分母與分子各自求導。

   有些人會寫成整個式子求導

   $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{L}{=}\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$$

   或是看到相乘時直接各自求導

   $$\lim_{x\to a}f(x)g(x)\overset{L}{=}\lim_{x\to a}f'(x)g'(x)$$

   這是根本沒看清楚羅必達法則，這樣的人居然還蠻多的。

2. 原極限須為不定式 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$。

   例如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{3+5x}=0$ 並非不定式，上下求導以後 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{5}=\frac{1}{5}$。

3. 須上求導後的極限存在（或為無窮大），才能保證原極限也存在並且相等（或同為無窮大），而非兩者直接畫等號。

   例如 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x)}{x}=1$，上下求導以後 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos(x)}{1}$ 不存在。後者不存在，不能用來推論原極限也不存在。

4. 須 $f(x)$ 與 $g(x)$ 都在 $x=a$ 的附近（可不包含 $x=a$ 本身）可導。

   這點是非常顯然的，因爲使用羅必達法則，就是要去求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$，這個極限看的是 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 在 $x=a$ 附近的行爲，既然如此，就必須 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 在 a 的附近有定義。

下面這題是常見的誤用：

例題 10.4.4 已知 $f'(a)=2$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$。

解

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right]=f'(a)=2$$

錯解 ⚠

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}\overset{L}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)+f'(a-h)}{2}=f'(a)=2$$

解出的答案是一樣的，那是錯在哪呢？

$\boxed{\text{所犯的錯誤一}}$：由題目提供條件只知 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可導，並不知道在 $x=a$ 附近是否可導，因此前提並不滿足，你根本不知道你寫出 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(a+h)+f'(a-h)}{2}$ 是否合法。

$\boxed{\text{所犯的錯誤二}}$：假如無視錯誤一，還是上下求導了，會遇到第二個問題，那就是做到 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(a+h)+f'(a-h)}{2}$ 後應該如何繼續解下去。常見的謬誤是直接代 $h=0$ 得到 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(a)+f'(a)}{2}=f'(a)$。但做極限可以直接這樣代值嗎？除非你知道 $f'(x)$ 在 $x=a$ 是連續的，然而題目沒有說。很多老師教你這種錯誤解法，除了讓你沒學好羅必達法則，可能導致作答被扣分外，更要命的是強化了你「做極限就亂代值」的壞習慣！

若是將上一題的條件再弱化一點，沒告訴你 $f'(a)=2$，那就會更突顯出亂用羅必達法則的錯誤，連最後答案都錯了！我們知道 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 處是不可導的，就是說 $f'(0)$ 不存在，然而 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{2h}=0$！

或許你又會好奇，在 $x=a$ 處可導卻不在其附近可導，這真的是有可能的嗎？那麼以下便舉一具體例子：

設

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & ,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ 0 & ,\ x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

以及

$$g(x)=\begin{cases}x^2 & ,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ 0 & ,\ x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

然後驗證

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

因為

$$-\left|x^3\right|\le f(x)\le\left|x^3\right|$$

所以

$$-\frac{\left|h^3\right|}{h}\le\frac{f(h)}{h}\le\frac{\left|h^3\right|}{h}$$

而

$$\lim_{h\to 0}-\frac{\left|h^3\right|}{h}=0=\lim_{h\to 0}=\frac{\left|h^3\right|}{h}$$

因此由夾擠定理我們知道

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$$

然而在 $x\neq 0$ 處顯然 $f(x)$ 並不連續，不連續也就不可導，$g(x)$ 亦同。

如果把它們相除

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}x & ,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ 0 & ,\ x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}\end{cases}$$

則顯然極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

但是假使無視前提去使用羅必達的話

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

由於 $f'(x)$ 與 $g'(x)$ 都只在 $x=0$ 存在，而做極限 $x\to 0$ 是從 $x=0$ 的附近趨近到 0，這使得 $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 毫無意義！

羅必達法則雖是利器，卻是雙面刃，一個用得不好，就要傷了自己。若在選擇與填充，問題還小。在要求過程的計算題，就會害人自曝其短了！

最後補充不是誤用，而是無法派上用場的例子：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan(x)}{\sec(x)}\overset{L}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec(x)}{\tan(x)}\overset{L}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan(x)}{\sec(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x-1}}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{3x-1}}{3\sqrt{2x+1}}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x-1}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\tan(x)}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sec^2(x)}$$

使用條件沒有問題，問題是沒有簡化式子。我們使用羅必達法則的目的就是要新的極限比原來極限好處理，但是這個目的並不一定辦得到，可能沒有簡化，甚至變更複雜！

■ 10.5　羅必達法則的離散版本：Stoltz 定理

許多同學在求數列極限時，習慣性地也使用羅必達法則。例如 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n}$，使用羅必達法則寫成 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=0$。

這樣有點奇怪，因爲數列是離散的，嚴格說起來不能對其求導。若要看起來正確一點，可以先將 n 改爲 x[2]，寫成

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}\\ \overset{L}{=}&\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0\end{aligned}$$

這樣，因爲若 $f(x)\to L$，則 $a_n=f(n)\to L$，所以能推論原極限也是 0。但這樣似乎又囉嗦了點，既然看起來差不多，不嚴謹點對數列求導好像結果也一樣。

其實，在羅必達法則之後大約兩百年，奧地利數學家 Otto Stolz 於 1885 年提出了羅必達法則的離散版本，今日稱之爲 Stolz-Cesaro 定理。

定理 10.5.1　Stolz-Cesaro Theorem

(1) $\frac{0}{0}$ 型: $a_n\to 0, b_n\to 0$, 且 $\langle a_n\rangle$ 嚴格遞減, 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=L$ (L 可爲有限數或正

[2] 一般我們默認 x 取值爲實數、n 取值爲自然數。當然你如果非要在自己寫作過程中約定：我這裡的 n 是實數範圍，這樣倒不是不可以。不過一般我們是對於函數自變量使用 x,y,z 的符號，數列的足碼爲自然數使用 natural number 的第一個字母 n。

負無限大), 則 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=L$ 。

(2) $\frac{\star}{\infty}$ 型: $a_n\to\infty$, 且 $\langle a_n\rangle$ 嚴格遞增, 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=L$ (L 可爲有限數或正負無限大) , 則 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=L$ 。

若是使用這個定理，便可寫成

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n}\\ \overset{S}{=}&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{(n+1)-n}\\ =&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\frac{n+1}{n})}{1}=0\end{aligned}$$

這樣既不囉嗦，也沒有對數列求導的問題。

若是再看一些無法將 a_n 視爲 $f(n)$ 的題，則更顯出 Stolz 定理的威力。

例題 10.5.1 (Cauchy 命題) 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ ，則必有 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=L$ 。

解

常見的證法是利用大一微積分的一個困難的 $\epsilon-\delta$ 方法來證，但不太容易寫，其難度可能接近數學系大二的高等微積分，甚至目前市面上有些微積分補教老師也在書上用了錯誤的證法。

然而若是使用 Stolz 定理：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\\ \overset{S}{=}&\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+\cdots+a_n)-(a_1+\cdots+a_{n-1})}{n-(n-1)}\\ =&\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1}=L\end{aligned}$$

好快的刀！

例題 10.5.2 已知 $a_1>0$ ，且

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$$

試證明 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$ 。

解因

$a_1>0$ ，顯然 $\langle a_n\rangle$ 爲嚴格遞增數列，則 a_n 必然是趨向一正數或正無限大。然

而若是趨向一正數 L，由遞迴式可得 $L=L+\frac{1}{L}$，這個式子是矛盾無解的，所以 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$。於是

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n}\\
\overset{S}{=}&\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-a_{n-1}^2}{2n-(2n-2)}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}\right)^2-a_{n-1}^2}{2}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{a_{n-1}^2}}{2}=1
\end{aligned}$$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$。

例題 10.5.3 已知 $a>1$，求 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}$。

解

此題在一般高中數學內也會出現，解法是使用夾擠定理，而這需要引用這個大小關係：對於任意 $a>1$，無論正數 k 有多大，只要 n 足夠大，便有 $a^n>n^k$。於是挑選 $a^n>n^3$，然後完成夾擠定理的完整過程。

若是使用 Stolz 定理：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}\\
\overset{S}{=}&\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-n^2}{a^{n+1}-a^n}\\
=&\frac{1}{a-1}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{a^n} \qquad \boxed{\text{分母拉出 } a^n \text{ 後，剩下的 } a-1 \text{ 提到 lim 外}}\\
\overset{S}{=}&\frac{1}{a-1}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)-(2n+1)}{a^{n+1}-a^n}\\
=&\frac{1}{(a-1)^2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{a^n}=0
\end{aligned}$$

10.6 凹凸性、反曲點定義問題

這裡探討些有關數學定義的事。

首先針對反曲點的定義，為什麼不說左右兩側凹凸性改變就好，還要加上連續性呢？這件事若認眞考察一下各個微積分教科書，還會發現不同作者使用的定義不甚相同。

有些作者是除了兩側凹凸性改變外，還要求該點有切線。這兩種定義是不等價的，例如下圖，函數圖形在 $x=0$ 兩側凹凸性不同，在原點連續但沒有切線。

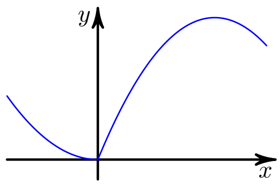


圖 10.1: 連續，但無切線，凹凸性改變

其實很多數學定義是人爲的，是我們有一些具體需要，選擇這樣子定，或是在許多不同的定法中，去作討論、抉擇，選一個比較有好處、比較能和其它定義與性質相容的。例如 0! 爲什麼定爲 1？因爲我可以滿足 $1!=1\times 0!$，又可以滿足 $C_0^5=\frac{5!}{0!5!}=1$，還能相容排列數：0 個相異物排列一共 $0!=1$ 種方法，實在是舒服！

另外一例如 0^0，此例在國內外的網路討論區都有熱烈的討論，許多人傾向讓它維持無定義，因爲由指數律 $0^0=\frac{0^1}{0^1}$ 是無定義的。又有不少人認爲定義 $0^0=1$ 好，例如 Donald Knuth：1992 'Two Notes on Notation' *Mathematical Association of America* Volume5, pp 403 - 422. [3] 列舉了他認爲 0^0 應該是 1 的理由。順帶一提，此文作者 Donald Knuth 是計算機界的大神級人物，本文寫作所用的 LaTeX 排版語言即是 Donald Knuth 於 1977 年設計的。由於不同的定法各有其優缺點，所以 0^0 目前沒有一個公認的定義。

還有一例是負數的有理次方。高中數學教材會說有理次方的底數須爲正數，所以像是 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 是沒有定義的。但是如果我們找一些計算機來嘗試，有些會顯示結果爲 -2 [4]，有些爲顯示爲 $1+\sqrt{3}i$ [5]，爲什麼會這樣呢？其實這也同樣是依據每個人自己需求，認爲如何定法對他來說比較方便，就選擇那樣定。畢竟每個定法皆有其優缺點，於是數學家沒有去統一定義。你會看到某些書在開頭先言明：本書規定 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$。這部分欲深入閱讀，可參考 Dina Tirosh and Ruhama Even:1997 'To Define or Not to Define: The Case of $(-8)^{\frac{1}{3}}$', *Educational Studies in Mathematics* Volume 33, pp 321 - 330. [6]

又有一例是統計中的四分位數。可參考建中繆友勇老師所寫的＜淺談百分位數＞，文中探討了四分位數兩種定義的不同之處。在最後一頁中老師提到「統計教學是很輕鬆愉快的，不要太斤斤計較細微數值的差距，或花費時間停留在追求絕對標準答案中。」

所以，關於反曲點，或許我們可以這樣理解：我們主要目的是想要分析函數的行爲，如果函數圖形雖在 $x=a$ 左右改變凹凸性，但是在 $x=a$ 處是斷開的，比方說 $y=\sec(x)$，那我特地說它是反曲點做什麼呢？並沒有增進我對函數的理解啊！如果增加連續性或是須有切線的條件，會讓反曲點「有意思」一點！

接著我們討論凹凸性的定義。許多同學會有疑問，如果二階導數在開區間 (a,b) 爲正，豈不是代表一階導函數 $f'(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上遞增，應該回答在 $[a,b]$ 是凹向上嗎？爲什麼解答常常只寫在 (a,b) 呢？其實大多的大一微積分教科書在這邊都是簡單講講，沒有作深入探討的，就連我在前面所介紹的也同樣是模糊帶過。事實上這裡也通常也沒必要太過講究，數學是實用性的東西，並不是一個純粹抽象思維遊戲，沒有必要繞在一些小細節打轉。稱呼函數圖形在 (a,b) 凹向上或是在 $[a,b]$ 是凹向上，差別大嗎？很多時候我們很斤斤計較、咬文嚼字，是因爲在數學史中，我們看到太多次訴諸直觀帶來的誤解，

[3] https://arxiv.org/abs/math/9205211
[4] 例如在 Google 輸入 (−8)^(1/3)。
[5] 例如在 Wolfram alpha 輸入 (−8)^(1/3)，網址爲 https://www.wolframalpha.com 。
[6] https://link.springer.com/article/10.1023/A:1002916606955

數學家們在這事上吃虧多了，後來逐漸將數學搞得越來越形式化、講究嚴謹。但是眼前這個問題，顯然是無關緊要的，並不會影響我們對函數的理解。

那麼，到底問題出在哪裡呢？以下就詳細列出凸函數的定義：

定義 10.6.1 凸函數的幾種常見定義

設 $f(x)$ 是在區間 I 上有定義的函數。

定義 1 對任意 $x_1, x_2 \in I$ 皆有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

則 $f(x)$ 在區間 I 上是凸函數。

定義 2 對任意 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ 皆有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$$

則 $f(x)$ 在區間 I 上是凸函數。

定義 3 對任意 $x_1, x_2 \in I, t \in (0,1)$ 皆有

$$f\big(tx_1+(1-t)x_2\big) \le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$$

則 $f(x)$ 在區間 I 上是凸函數。

定義 4 對任意 $x, x_1, x_2 \in I, x_1 < x < x_2$ 皆有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

則 $f(x)$ 在區間 I 上是凸函數。

定義 5 對任意 $x, x_1, x_2 \in I, x_1 < x < x_2$ 皆有

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \ge 0$$

則 $f(x)$ 在區間 I 上是凸函數。

定義 6 若函數 $f(x)$ 在區間 I 上可導，且對於任意 $x_0 \in I$ 皆滿足

$$f(x) \ge f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

即曲線 $y=f(x)$ 的切線恆在曲線下方，則 $f(x)$ 在區間 I 上是凸函數。

定義 7 若函數 $f(x)$ 在區間 I 上可導，且導函數 $f'(x)$ 單調遞增，則 $f(x)$ 在區間 I 上是凸函數。

定義 8 若函數 $f(x)$ 在區間 I 上二次可導，且 $f''(x) \ge 0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在區間 I 上是凸函數。

上述定義中若將 $\ge$ 改爲 $>$，或 $\le$ 改爲 $<$，則爲嚴格凸函數。

上面這些定義之間並不完全等價，其中定義 1 與定義 2 等價；定義 3 與定義 4 及定義 5 等價；定義 6 與定義 7 等價。定義 1 的條件較弱，$f(x)$ 是可以不在 I 上連續的，但是若滿足定義 3 則 $f(x)$ 必須在 I 上連續，因此定義 3 到定義 5 的條件是較強的。當 $f(x)$ 是連續的時，定義 1 到定義 5 通通等價。而定義 6 與定義 7 條件更強，要求了 $f(x)$ 在 I 上一次可導。當 $f(x)$ 可導時，定義 1 到定義 7 通通等價。定義 8 的條件又更強，要求了 $f(x)$ 在 I 上二次可導。當 $f(x)$ 二次可導時，定義 1 到定義 8 通通等價。

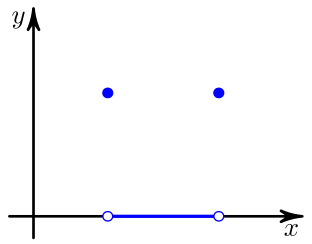


圖 10.2: 不連續的凸函數

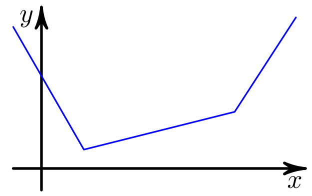


圖 10.3: 不可導的凸函數

上述八個定義之間的等價關係示意如下：

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5) \Leftarrow (6) \Leftrightarrow (7) \Leftarrow (8)$$

因此，定義 1 與定義 2 的適用性較廣，符合的函數較多；而定義 6 到定義 8 條件太強，其實不太好，但是操作簡便，因此也在大多微積分課程中出現；定義 3 是最好的，最常在書上[7]使用，因爲它除了條件不會太強外，不連續的凸函數 [8]也是較少見的。其實，凹凸性的重要性，近代多是在經濟學、機器學習等實用領域上體現，實用上是不太會碰到只滿足定義 1 而不滿足定義 3 的函數。

總結以上討論，原來的凹凸性的區間問題，說穿了不過就是採用了不等價的定義去看問題所致罷了。

■ 10.7 泰勒展開式

● 10.7.1 泰勒展開：多項式逼近函數

多項式是一個很棒的函數，好處之一是它可以求導無限多次。這種函數應該發予良民證，實在太棒了！不過就這點而言還不夠特別，指數函數、三角函數也都可以發予良民證。

多項式還有一個好處是比較好代值，譬如說 $p(x)=x^{23}-5x^{18}+7x^{11}+6x^3-8$，如果我們要算 $p(3.01)$，很煩，但起碼還能算。那如果是遇到其它函數呢？譬如說 $\sin(1)$，就不會算那麼久了，因爲根本不會。

數學上常常是化繁爲簡、化未知爲已知。所以就有個想法，當我遇到一個函數 $f(x)$，可不可以寫出一個多項式 $p(x)$，是可以跟它非常接近的呢？至少，在我要算的點的附近是很接近的。譬如說剛剛的 $\sin(1)$，如果我的多項式只能在 $[-1,2]$ 上跟 $\sin(x)$ 很接近，那其實也夠用了。待我將這個多項式寫出來之後，凡是在這「附近」裡面，我就可以將原本想對 $f(x)$ 做的事情，改對 $p(x)$ 做，舉凡加、減、乘、除、次方、代入、微分、積分等等。所以當然，這個「附近」的範圍，能越大就越好。

[7]不限於大一微積分的書。

[8]換句話說，只能符合定義 1 或定義 2 的函數。

舉個例子，下圖有條曲線 $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+9x+3}{1.58^x}$，它並不是多項式。現在，我找到一個三次多項式 $p(x)=12.241687-8.2648x+1.7988x^2-0.1065x^3$，它與 $f(x)$ 在 $x=3$ 的附近還蠻接近的。離 $x=3$ 遠一點之後，兩條曲線才越差越多。

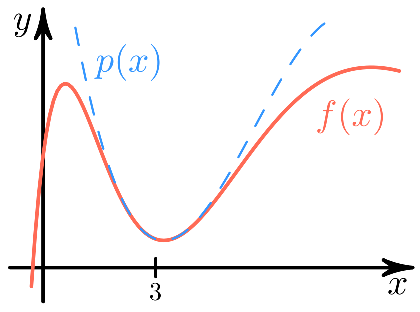


圖 10.4: 以多項式逼近函數

牛頓在處理某些函數時，用了一些奇技淫巧寫出多項式來逼近[9]。後來他的一個學生，Brook Taylor，在 1715 年時，提出一般性的理論，探討求出一個函數的多項式逼近的一般方法。

如果我們現在想找個 $p(x)$ 在 $x=a$ 的附近去逼近 $f(x)$ 。這個逼近的想法是這樣的：首先，兩個函數值 $f(a)$ 與 $p(a)$ 當然希望能一樣。接著，假如 $f(x)$ 可導的話，若它們在 $x=a$ 處的切線斜率也能夠一樣，那麼這兩個就更接近了。也就是說，兩者一階導數相等 $f'(a)=p'(a)$，這叫做一階切近。再來，假如 $f(x)$ 二階可導，如果又有 $f''(a)=p''(a)$，那麼這兩個便更加接近了，這叫做二階切近。以此類推、得寸進尺。只要 $f(x)$ 是 k 階可導，我都希望 $f^{(k)}(x)$ 與 $p^{(k)}(x)$ 能夠相等，這叫做 k 階切近。如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 處無窮可導的話，那我就希望寫一個冪級數，可以與 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的任意階導數都相等。

k 階切近

$f(x)$		$p(x)$
$f(a)$	$=$	$p(a)$
$f'(a)$	$=$	$p'(a)$
	$\vdots$	
$f^k(a)$	$=$	$f^k(a)$

按此想法，便可以將一個無窮可導的函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處展開成：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \tag{10.2}$$

它的一般項形式是 $\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$ 。爲什麼會這樣呢？爲了檢驗等號右邊的確就是我們理想中的 $p(x)$，我們試著在等號右邊代 $x=a$、求導之後代 $x=a$、求導兩次之後代 $x=a$、……看看是否分別都等於 $f(a)$、$f'(a)$、$f''(a)$、……。

[9]事實上，在微積分草創時期，除了牛頓也有其它許多數學家諸如 Gregory、萊布尼茲、Johan Bernoulli、棣美弗等等，都寫出某些函數的多項式逼近。

直接代 a，一次項以上全部都有 $(x-a)$，所以代入以後全是零，只剩 $f(a)$：

$$f(a)=f(a)+0+0+\cdots \tag{10.3}$$

若是我們對等號兩邊先求導一次，得到

$$f'(x)=0+f'(a)+\frac{f''(a)}{2!}\times 2(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\times n(x-a)^{n-1}+\cdots \tag{10.4}$$

此時常數項 $f(a)$ 求導後不見了。至於二次以上的項，求導完都至少還有一個 $(x-a)$ 。接著代 $x=a$，得到

$$f'(a)=0+f'(a)+0+\cdots+0+\cdots \tag{10.5}$$

所以在求導完之後代 a 時，二次以上的項也全跟著不見了，於是只剩一次項。而原來一次項 $f'(a)(x-a)$ 求導後，就是 $f'(a)$ 。

一般而言，求導 n 次後

$$f^{(n)}(x)=0+0+\cdots+f^{(n)}(a)+f^{(n+1)}(a)(x-a)+\cdots \tag{10.6}$$

所有 $n-1$ 次以下的項全部變成零，而 $n+1$ 次以上的項，在求導完以後全部都還有至少一個 $(x-a)$，所以在微完之後代 a 時，它們也全跟著不見了，所以只剩 n 次項。而 n 次項 $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 求導 n 次以後，也成爲常數。值是多少呢？因爲求導 n 次以後會乘以 $n!$[10]，所以就是 $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\times n!=f^{(n)}(a)$ 。在以上的檢驗過程中，你大概就能明白爲什麼一般項長那樣了，擺個 $n!$ 在分母就是特意要拿來消的。

現在知道用 k 階切近的辦法來將函數展開成多項式了，刻不容緩，我們馬上來試刀吧！

例題 10.7.1 試求 e^x 在 $x=0$ 處的泰勒展開式。

解

在 $x=0$ 處的泰勒展開式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \tag{10.7}$$

我們想要寫出這個出來，就必須知道 e^x 在 $x=0$ 處的各階導數。不過這太容易了，e^x 不管怎麼求導都還是 e^x，代 0 以後就是 1 。於是有

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

[10] 求導第一次會乘以 n，求導第二次乘以 $n-1$，求導第三次乘以 $n-2$，……

例題 10.7.2 試求 $\sin(x)$ 在 $x=0$ 處的泰勒展開式。

解

$\sin(x)$ 的高階導函數具有規律

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) & f'(x) &= \cos(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) & f^{(3)}(x) &= -\cos(x) \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) & f^{(5)}(x) &= \cos(x) \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

再配合 $\sin(0)=0$、$\cos(0)=1$，便易知

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$\cos(x)$ 的情況十分類似，你就自己動手寫吧！

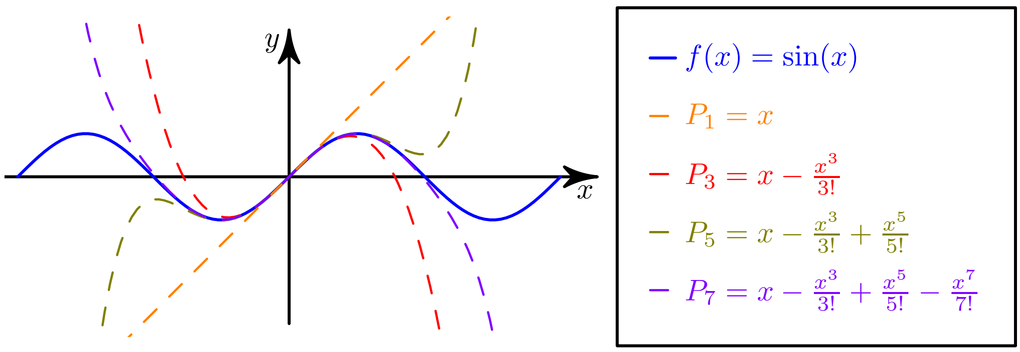


圖 10.5: $\sin(x)$ 與 k 階切近

e^x 與 $\sin(x)$ 及 $\cos(x)$ 的高階導函數都有很簡單的規律，所以用一般的方法寫出馬克勞林展開都是很容易的。而且收斂區間都是整個實數 $\mathbb{R}$ [11]，所以就算代一百萬，兩邊也是相等的。現在我們來檢查一件事，我剛剛說，只要在收斂區間內，本來想對 $f(x)$ 做的一些事，可以改對 $p(x)$ 做。我們知道 e^x 求導後是自己，於是我們將

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

作**逐項求導**，得到

$$0+1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

真的等於自己。我們再檢查 $\sin(x)$ 求導後是 $\cos(x)$，將

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

[11] 判斷收斂區間的方法留待後面介紹。

作逐項求導，得到

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

果然就是 $\cos(x)$ 的展開。

10.7.2 泰勒展開式在大一微積分的應用

這裡稍舉幾個應用，無法列更多，因爲有些應用基於其它不在高中範圍的知識。

10.7.2.1 估計某些數

例題 10.7.3 估計 e 的近似值。

解

我們可以利用 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$，代入 $x=1$，便有

$$\begin{aligned} e &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\cdots \\ &\fallingdotseq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=2.7083 \end{aligned}$$

只取前五項加起來是 2.7083，而精確值是 2.718281828…，看起來已經頗爲接近。

10.7.2.2 估計定積分

例題 10.7.4 估計 $\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ 的近似值。

解

e^{x^2} 沒有初等反導函數，所以無法利用微積分基本定理求出這個積分的精確值。但我們可以利用泰勒展開，計算前幾項來求近似值：

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}+\cdots\right)\Big|_0^1 \\ &= 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}+\cdots \\ &\fallingdotseq 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}+\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!} \\ &\fallingdotseq 1.4618 \end{aligned}$$

用數學軟體去估這個積分，大約是 1.46265，我們取前五項做起來就已經頗接近了。

10.7.2.3 求極限

例題 10.7.5 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$。

解

我們將 $\tan(x)$ 與 $\sin(x)$ 都展開，得到

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)}{x^3}\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+\cdots}{x^3}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

因爲 $x\to 0$，所以我們直接只比較次方最小的，因此展開到三次項就可以了。

由此題可見，在做極限時使用泰勒展開，可能會簡化不少過程。反觀羅必達法則，它許多時候好用，但有一些缺點。其一是，你可能事先不知道要求導幾次才結束，甚至可能根本沒有結束的時候。其二是，就算你知道要求導七次好了，你有那個勇氣做下去嗎？等你做完一題，秦始皇都已經把萬里長城蓋好了。因此，許多時候用泰勒展開也是處理極限式的一個好選擇。

例題 10.7.6 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{e^x-1}$。

解

這題用羅必達也可很快做出來，若是用泰勒展開：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\cdots}{(1+x+\cdots)-1}=1$$

實在很快，才展開到一次項而已。像這種題目簡直可以不拿筆算，直接盯著題目就心算出來了。然後對著題目說：「我一眼就把你看穿了！」。

例題 10.7.7 求 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$。

解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\right)+\left(1-x+\frac{1}{2!}(-x)^2+\cdots\right)-2}{x^2}\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\cdots}{x^2}=1\end{aligned}$$

求極限可以說是泰勒展開式非常重要的應用，在大一微積分的各種考試來說都是重要的考題 [12]。

[12] 無論你是哪一國的大一微積分課程，還是什麼轉學考、研究所考試、中國大陸的專升本高等數學及考

10.7.2.4 求高階導數

泰勒展開的一般式是用高階導數來定義的，然而高階導數的問題竟也可以反過來先求泰勒展開式再反過來求！怎麼會這樣呢？見下題演示。

例題 10.7.8 若 $f(x)=x^6e^{x^3}$，求 $f^{(60)}(0)$ 。

解

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots$$

$$\boxed{t=x^3} \quad e^{x^3} = 1+x^3+\frac{x^6}{2!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{n!}+\cdots$$

$$x^6e^{x^3} = x^6+x^9+\frac{x^{12}}{2!}+\cdots+\frac{x^{3n+6}}{n!}+\cdots$$

從中找出第 60 階，就是 $\frac{x^{60}}{18!}$ 。我們知道在 $x=0$ 處泰勒展開式的第 60 項係數是 $\frac{f^{(60)}(0)}{60!}$，所以 $\frac{f^{(60)}(0)}{60!}=\frac{x^{60}}{18!}$。兩邊同乘以乘以 60!，得到

$$f^{(60)}(0)=\frac{1}{18!}\times 60!$$

10.7.2.5 求級數和

若要求級數和，可以技巧地將其視爲某函數的泰勒展開式再代入某值而來，從而回去該函數代值得到答案。具體請看下面這道例題，注意，這個應用即使在大一微積分都是屬於偏難的，一般是偏難的考試才會往這個主題出題。

例題 10.7.9 求級數 $\frac{1^2}{0!}+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+\ldots$ 。

解

首先寫成

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$$

我們定

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n$$

那麼我們想求的級數和便是 $f(1)$ 。

解 1

爲了將分子的 $(n+1)^2$ 消掉，做積分

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^{n+1}+C$$

研數學，但凡涉及泰勒展開這主題，應用在求極限都是重要考點。

接著拆開成

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}+C\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}+C && \boxed{\text{那項是 0，可移去}}\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n+1}+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n}+C\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+2}+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n}+C && \boxed{\text{前項做足碼平移}}\\
=&x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n}+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n}+C=(x^2+x)e^x+C
\end{aligned}$$

所以

$$f(x)=F'(x)=(x^2+3x+1)e^x$$

則原級數等於 $f(1)=5e$ 。

解 2

將 $f(x)$ 拆成

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)+3n+1}{n!}x^n$$

這樣拆的用意是，下一步可以分成幾項後分別去和分母消

$$\begin{aligned}
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\\
=&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n && \boxed{\text{先將等於 0 的幾項去掉}}\\
=&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}x^n+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+2}+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n && \boxed{\text{足碼平移}}\\
=&x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n+3x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\\
=&x^2e^x+3xe^x+e^x=(x^2+3x+1)e^x
\end{aligned}$$

所以 $f(1)=5e$。

10.7.2.6 推導歐拉公式

有一個非常奇妙的公式

$$e^{i\pi}+1=0 \tag{10.8}$$

這幾乎是被公認爲世上最美妙的公式。任何數加 0 都還是自己、任何數乘以 1 都還是自己、圓周率 π，以及高等數學中非常重要的常數 e，這幾個竟然被一個簡潔的式子串在一

起。

爲什麼會這樣呢？首先我們來看一個相對複雜些的式子

$$e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta) \tag{10.9}$$

對於左式，我們將 $i\theta$ 代入到 e^x 在 $x=0$ 處的泰勒展開式：

$$e^{i\theta}=1+i\theta+\frac{1}{2!}(i\theta)^2+\frac{1}{3!}(i\theta)^3+\frac{1}{4!}(i\theta)^4+\cdots \tag{10.10}$$

利用 $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$，可簡化爲

$$e^{i\theta}=1+i\theta-\frac{1}{2!}\theta^2-\frac{i}{3!}\theta^3+\frac{1}{4}\theta^4+\cdots \tag{10.11}$$

下一步將實部、虛部分開寫

$$e^{i\theta}=\left(1-\frac{1}{2!}\theta^2+\frac{1}{4}\theta^4-\cdots\right)+i\left(\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\cdots\right) \tag{10.12}$$

仔細一看，這兩括號分別就是 $\cos(\theta)$ 與 $\sin(\theta)$ 在 $x=0$ 處的泰勒展開，所以就得到了 $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$。

接下來只要代 $\theta=\pi$，就有了

$$\begin{aligned}e^{i\pi}&=\cos(\pi)+i\sin(\pi)\\&=-1+i\times 0\end{aligned}$$

再移項一下就有我們那最美妙的歐拉公式了！

10.7.3 泰勒展開式在高中數學的應用

其實沒啥大用。泰勒展開是屠龍刀，威力十分驚人。但高中數學是養小雞的地方，你要拿屠龍刀在這裡劈來砍去並不是不可以，但我覺得這樣很傻。

硬要說的話，下面來舉例吧。

例題 10.7.10 求 x^{200} 除以 $(x-1)^2$ 的餘式。

解 1

首先利用除法原理列式

$$x^{200}=Q(x)(x-1)^2+(ax+b)$$

設 $f(x)=x^{200}$，根據 $x=1$ 處泰勒展開式的一般式

$$f(x)=x^{200}=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\cdots+\frac{f^{200}(0)}{200!}(x-1)^{200}$$

我們注意到，由於 $\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$ 這一項開始都是 $x-1$ 的至少二次，所以整個 $\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\cdots+\frac{f^{200}(1)}{200!}(x-1)^{200}$ 其實就是 $Q(x)(x-1)^2$，你就把每一項都拉出 $(x-1)^2$ 就能看出來了。所以

$$x^{200}$$

$$= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{f^{200}(1)}{200!}(x-1)^{200}$$

$$= 1 + 200(x-1) + (x-1)^2\left[\frac{f''(1)}{2!} + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1) + \cdots + \frac{f^{200}(1)}{200!}(x-1)^{198}\right]$$

$$= Q(x)(x-1)^2 + (ax+b)$$

經過比對，餘式 $ax+b$ 就是 $1+200(x-1)=200x-199$。

解 2

如果你的老師跟你說，泰勒展開很重要哦，本題這種困難的求餘式就能用泰勒展開來做。那我很懷疑，他可能是在炫技，暗示你他很厲害，趕快繼續交學費來跟他補習。

如果真要在此題應用上微積分，其實只須

$$\begin{aligned} x^{200} &= Q(x)(x-1)^2 + (ax+b) \\ \Rightarrow 1 &= 0 + a + b && \boxed{\text{代 } x=1} \\ 200x^{199} &= Q'(x)(x-1)^2 + Q(x)\cdot 2(x-1) + a && \boxed{\text{回去等號兩邊求導}} \\ \Rightarrow 200 &= 0 + 0 + a && \boxed{\text{求導完再代 } x=1} \end{aligned}$$

這就得到

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a=200 \end{cases}$$

容易解出 $a=200, b=-199$，那麼餘式就是 $200x-199$。

解 3

甚至直接傳統的解餘式技巧都能解決問題。

$$\begin{aligned} x^{200} &= Q(x)(x-1)^2 + (ax+b) \\ &= Q(x)(x-1)^2 + a(x-1) + c \\ 1 &= 0 + 0 + c && \boxed{\text{代 } x=1} \\ \Rightarrow x^{200} &= Q(x)(x-1)^2 + a(x-1) + 1 \\ \Rightarrow x^{200} - 1 &= Q(x)(x-1)^2 + a(x-1) \\ \Rightarrow \frac{x^{200}-1}{x-1} &= Q(x)(x-1) + a \end{aligned}$$

這裡注意，你可以把左式的分子寫成 $x^{200}-1=(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{199})$，或者整個左式直接看出等比級數公式，總之：

$$1+x+x^2+\cdots+x^{199}=Q(x)(x-1)+a$$

$$200=0+a \qquad \boxed{\text{代 } x=1}$$

故 $a=200$，則餘式爲 $200(x-1)+1=200x-199$。

解 4

也能使用二項式展開

$$\begin{aligned}x^{200}&=\left(x-1+1\right)^{200}\\&=C_0^{200}1^{200}+C_1^{200}(x-1)1^{199}+\cdots \qquad \boxed{\text{後面都是 } x-1 \text{ 的起碼二次}}\\&=1+200(x-1)+Q(x)(x-1)^2\end{aligned}$$

解 5

若覺得上一解法的二項展開過程略複雜，可以先變數代換 $t=x-1$

$$\begin{aligned}x^{200}=(1+t)^{200}&=C_0^{200}1^{200}+C_1^{200}t\cdot1^{199}+\cdots+C_{200}^{200}t^{200}\\&=1+200t+\cdots+t^{200}\\&=1+200(x-1)+Q(x)(x-1)^2\end{aligned}$$

在現行的 108 課綱中，泰勒展開式確實被具體提到了。但並不是具一般意義的泰勒展開式，也就是前文所介紹的概念。它說的是，任意多項式，我們可以進行平移，寫成

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0 \tag{10.13}$$

$$=a'_n(x-c)^n+a'_{n-1}(x-c)^{n-1}+\cdots+a_2(x-c)^2+a_1(x-c)+a_0 \tag{10.14}$$

我們在高一的時候，學過用綜合除法來完成這種平移。

泰勒展開式是想法是多項式逼近函數，那如果被逼近的函數本身也是個多項式函數呢？也就是說，考慮多項式函數在 $x=c$ 處的泰勒展開式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0 \tag{10.15}$$

$$=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)(c)}}{n!}(x-c)^n \tag{10.16}$$

比對式子 (10.14) 與式子 (10.16)，就知道[13] 多項式函數在 $x=c$ 處的泰勒展開式其實就完全等於綜合除法做出來的多項式平移。

也就是說，高中教材在跟你提到多項式的泰勒展開式時，它其實挪用了大一微積分當中的重要名詞，卻不帶其內涵。要說它講錯的話也不算，多項式進行泰勒展開的話確實就是它自己的平移，但你其實沒有眞正學到什麼有關泰勒展開的概念。它的眞正厲害之處，是拿多項式函數來逼近其它各種函數，並因此帶來許多應用，威力驚人。

[13]你不要問我式子 (10.14) 看起來是未知係數怎麼知道相等，$a=b$ 且 $a=c$ 的話豈不說明 $b=c$ 嗎？

以一次近似這個主題來說，現行課綱的講法，用多項式的泰勒展開來講。其實說白了，就是多項式平移之後，略去二次以上的項。甚至，你看我前文，我根本沒這樣講，我的講法是局部地切線代替曲線。也就是說，要理解一次近似，用多項式的平移（或者你非要講多項式的泰勒展開）並不是唯一途徑。

總之，泰勒展開式這個主題，它在大一微積分是宛如屠龍刀，拿到高中數學的話則好像帶著屠龍刀進入到小雞養殖場。

10.8 後記：大一微積分學些什麼？

多數同學容易有個誤解，翻開大一微積分教科書目錄，好像不少都在高中學過，便掉以輕心，結果期中考翻了船。特別是許多同學在高中補習班學了半調子的微積分，這和大學課堂中的嚴謹、深刻是差很多的。

其實大一微積分的內容，相比高中微積分是大大地加深加廣了。首先，高中談的是多項式函數的微積分，大學則再涉及三角函數、指對數等等，還有高中課綱已經刪除了很多年的反三角函數及球面方程式。所以光是目錄名稱相似，其實也多了不少學習內容。

以下再稍舉大學比高中多學的主題，並沒有全面性地列出來，而且實際上授課老師不同的話課程內容也不盡相同，畢竟大學不像國高中有教育部公定的課綱。

高中談極限一般只涉及有理函數、根式等等，大學則還有三角函數、指對數，使得解極限的方法更多樣，甚至有一節爲極限的嚴格定義，使用 ϵ-δ 的形式化語言來對於極限下定義，並要求同學利用此定義來作各種證明，其難懂的程度可謂微積分的開學殺手！

關於微分學的部分，高中只談微分的定義、性質，還有多項式的求導規則，應用方面則有單調性、凹凸性等等。大學的微分學還涉及隱函數的微分、反函數的微分、對數微分法等等高中沒教過的單元，也有對於參數式曲線或極坐標曲線求切線、極值等等，在應用上也還有相關變率、牛頓求根法等等主題。

積分學方面，高中的積分定義是使用等差分割作上下和，大學的積分定義則是任意分割、任意取樣求和，還涉及可積性的問題。高中求積分只針對最簡單的多項式，並沒有特別學習積分技巧，頂多有某些老師偷教變數代換。大學則有專門一章探討積分技巧以面對各種積分函數，包含分部積分、有理函數的積分、三角代換等等。另外也有個單元叫做瑕積分，討論如何處理積分範圍或被積分函數涉及無限大的情況。

現行課綱談了一下泰勒展開式，但如前文所述，現行教材講的其實是多項式函數的平移。也有些高中老師會偷教較一般的泰勒展開式，但往往同學只學到式子的定義而不了解其精神，應用層面也不多[14]。大學則是要利用泰勒展開式來近似函數、估計函數值、用來簡便解決困難的極限題[15]，也要處理泰勒展開式的餘項。

除了高中會涉及到的單變數微分學與積分學外，大學微積分還會討論無窮級數的斂散問題，學習好幾種判斷級數收斂發散的方法。接著學習多變數的微分學，在單變數微分學討論過的諸如連鎖規則、隱函數微分、求極值等等，在多變數的版本變得複雜度更高。多變數的積分學則是二重積分及三重積分，複雜度比單變數積分高了不少，常常要考慮如何分析積分區域、如何填寫積分上下限，甚至有交換積分順序的問題。

除了以上這些，理工科系還會學到向量微積分，這在電磁學、流體力學等進階課程是非常重要的基礎。而其難度在大一微積分來說是較高的，而且因爲是學年最末才學到，往往沒有足夠時間讀熟。

[14]所用到的幾個地方都是高中數學本來就有其它方法解決的，這點前文也具體說過了。
[15]許多時候比羅必達法則威力更強！

綜上所述，大一微積分的內容比高中所學多了不少，教授也會對學生答題的計算過程較爲要求，不能再像高中時隨便寫寫輕易過關。因此，雖然大一微積分不能算是高度困難的學科[16]，但也不宜因爲高中學過一點點便掉以輕心。很多人翻船並不是因爲微積分眞的多難，而是自以爲高中學過而掉以輕心。

[16]微積分其實還是很困難的，但困難的部分都放在高等微積分及更進階的課程裡讓數學系去傷腦筋了，大多人會碰到的大一微積分課程只會處理比較基本、簡單的。